

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

الجبر، التفاضل

الشعب: رياضيات

تقني رياضي
علوم طبيعية

3

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

الجزء الثاني

السنة الثالثة من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي
الشعب:

- رياضيات
- تقني رياضي
- علوم تجريبية

إشراف و تأليف

محمد فاتح مراد..... مفتش التربية و التكوين

المؤلفون:

- | | |
|--------------------|------------------------|
| لـ تاوريرت جمال | مفتش التربية و التكوين |
| لـ محمد قورين | مفتش التربية و التكوين |
| لـ عبد الحفيظ فلاح | أستاذ التعليم الثانوي |
| لـ عبد المؤمن موس | أستاذ التعليم الثانوي |
| لـ غريسي بلجيلالي | أستاذ التعليم الثانوي |

بسم الله الرحمن الرحيم

مدخل

أعد هذا الكتاب استجابة لمتطلبات المنهاج الجديد الخاص بالسنة الثالثة من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي الخاص بشعب الرياضيات ، التقني الرياضي والعلوم التجريبية الذي شرع في تطبيقه ابتداء من الدخول المدرسي 2007 – 2008 .

بالإضافة إلى الاحترام التام للمنهاج فقد حاولنا العمل بمختلف التوجيهات الواردة فيه كما حرصنا على تجسيد المقاربة بالكفاءات التي بني عليها من خلال اختيار أنشطة مناسبة سواء عند مقاربة مختلف المفاهيم أو عند إدماجها كما حظي استعمال تكنولوجيات الإعلام والاتصال بالاهتمام اللازم.

يحتوي الكتاب على ستة (6) أبواب تمت هيكلتها بنفس الكيفية على النحو التالي:

- عرض للكفاءات المستهدفة إضافة إلى نبذة تاريخية.
- أنشطة تمهيدية.
- الدرس.
- طرائق و تمارين محلولة.
- أعمال موجهة.
- استعداد للبكالوريا.
- تمارين و مسائل.
- اختبار معلوماتك.

أردنا أن نجعل من هذا الكتاب وسيلة عمل ممتعة و ناجعة في آن واحد، نتمنى أن يمكنكم من التحضير الجيد لامتحان نهاية السنة.

و كون هذا العمل إنجازا بشريا فإنه لا يخلو من النقائص، و عليه فإننا نرحب، بكل اهتمام، بانتقادات القراء التي تهدف إلى إثراء و تحسين الكتاب و هم مشكورون مسبقا على ذلك.

الموضوع

الصفحة

1. المتتاليات العددية 5

أنشطة 6

الدرس والطرائق

تذكير حول المتتاليات العددية 8

الاستدلال بالنزاجع 10

تقارب متتالية عددية 12

المتتالية المحدودة 14

متتاليتان متجاورتان 16

أعمال موجهة 18

استعد للباكالوريا 22

تمارين 24

اختبر معلوماتك 40

2. القسمة في $\mathbb{Z}$ 41

أنشطة 42

الدرس والطرائق

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ 44

القسمة الأقليدية في $\mathbb{Z}$ 46

أعمال موجهة 52

استعد للباكالوريا 54

تمارين 56

اختبر معلوماتك 64

3. الموافقات في $\mathbb{Z}$ 65

أنشطة 66

الدرس والطرائق

الموافقات في $\mathbb{Z}$ 68

التعداد 72

أعمال موجهة 74

استعد للباكالوريا 76

تمارين 78

اختبر معلوماتك 86

الموضوع

الصفحة

4. الأعداد الأولية 87

أنشطة 88

الدرس والطرائق

الأعداد الأولية 90

المضاعف المشترك الأصغر لعددتين 94

مبرهنة بيزو 98

مبرهنة غوص 100

أعمال موجهة 102

استعد للباكالوريا 104

تمارين 106

اختبر معلوماتك 118

5. الأعداد المركبة 119

أنشطة 120

الدرس والطرائق

الأعداد المركبة 122

مرافق عدد مركب 124

العمليات في مجموعة الأعداد المركبة 124

طويلة وعمدة عدد مركب 128

الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم 130

الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم 132

المعادلات من الدرجة الثانية 134

تذكير حول التحويلات النقطية المألوفة 136

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية 138

أعمال موجهة 140

استعد للباكالوريا 142

تمارين 144

اختبر معلوماتك 162

9. المقاطع المستوية للسطوح 233

234 أنشطة

الدرس والطرائق

236 السطح الاسطواني الدوراني

238 سطح مخروط دوراني

240 المجسم المكافئ - المجسم الزائدي

242 أعمال موجهة

244 استعداد للباكالوريا

246 تمارين

250 اختبار معلوماتك

252 استعمال الحاسبة البيانية

6. التشابه المباشر في المستوي 163

164 أنشطة

الدرس والطرائق

166 التشابه المباشر

168 خواص التشابه المباشر (1)

170 خواص التشابه المباشر (2)

172 خواص التشابه المباشر (3)

174 أعمال موجهة

176 استعداد للباكالوريا

178 تمارين

192 اختبار معلوماتك

7. الجداء السلمي 193

194 أنشطة

الدرس والطرائق

196 الجداء السلمي في الفضاء

198 التعامد

200 المعادلات الديكارتية لمستوى

202 بعد نقطة عن مستوى

202 المرجح

204 أعمال موجهة

206 استعداد للباكالوريا

208 تمارين

213 اختبار معلوماتك

8. المستقيمات والمستويات في الفضاء 214

216 أنشطة

الدرس والطرائق

218 المستقيمات في الفضاء

218 تقاطع المستقيمات والمستويات

220 تقاطع مستويين

220 تقاطع ثلاث مستويات

222 أعمال موجهة

224 استعداد للباكالوريا

226 تمارين

232 اختبار معلوماتك

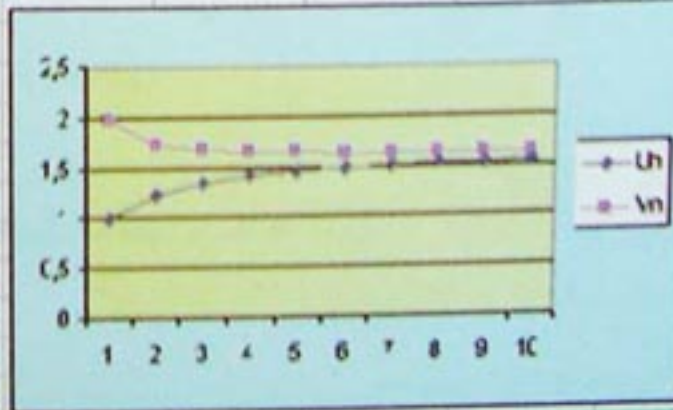
المتتاليات العددية 01

الكفاءات المستهدفة

- استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك ونهاية متتالية عددية.
- إثبات خاصية بالتراجع.
- دراسة سلوك ونهاية متتالية.
- معرفة واستعمال مفهوم متتاليتين متجاورتين.
- حل مشكلات توظف فيها المتتاليات والبرهان بالتراجع.

تمت دراسة المتتاليات العددية الأولى من طرف اليونان ، مثل متتالية الأعداد الأولية. أرخميدس قام بأعمال حول المتتاليات التي نهايتها تساوي p . في القرن الثالث عشر اكتشف الإيطالي **ليونارد فيبونايتشي** المتتالية التراجعية البسيطة التي تحمل اسمه $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ مع $u_0 = 1$ و $u_1 = 1$ ، و التي تترجم تطور نمو تكاثر حيوانات . المتتاليات الحسابية و الهندسية ظهرت في أوروبا و في الصين في القرون الوسطى . في عصر النهضة درست المتتاليات المعروفة لدينا اليوم .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	u_n	v_n					
2	1	1	2					
3	2	1,25	1,75					
4	3	1,3611111	1,6944444					
5	4	1,4236111	1,6736111					
6	5	1,4636111	1,6636111					
7	6	1,4913889	1,6580556					
8	7	1,5117970	1,6546542					
9	8	1,5274220	1,6524220					
10	9	1,5397677	1,6508768					
11	10	1,5497677	1,6497677					



نشاط أول

في القديم كان اليونان يتعاملون جيدا مع المربع التام لعدد طبيعي و وصلوا إلى النتيجة التالية: كلما جمعنا أعدادا فردية متتالية و بالتتابع نحصل على مربع تام لعدد طبيعي .

و هكذا: 1 مربع العدد 1 ، $1+3=4$ و 4 مربع العدد 2 ، $1+3+5=9$ و 9 مربع العدد 3 ، ...

	A	F
1	عدد تعريفي n	مجموع الأعداد العريضة المتتالية
2	1	
3	3	4
4	5	9
5	7	16
6	9	25
7	11	36
8	13	49
9	15	64
10	17	81
11	19	100
12	21	121
13	23	144
14		
15		

(1) أنجز ورقة المجدول الموالية بإتباع الخطوات التالية:

في العمود A و ابتداء من الخلية A2 أحجز الأعداد

الفردية من 1 إلى 99 .

في الخلية B3 أحجز $= A2 + A3$

في الخلية B4 أحجز $= B3 + A4$

(2) أحسب $1+3+5+7+9+...+53+55$

(3) أحسب $1+3+5+7+9+...+85+87$

(4) خمن حساب $1+3+5+...+(2n-1)$ بدلالة n .

(5) بفرض التخمين السابق صحيحا أثبت أن :

$$1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$$

نقول أن الخاصية وراثية .

نشاط ثان

A. تقترح مؤسسة عمومية عقدا للتوظيف كما يلي :مرتب شهري بـ 15000 DA في الشهر الأول و زيادة سنوية تقدر بـ 15% نسبي u_1 المرتب الشهري في السنة الأولى . نرسم بـ u_n للمرتب الشهري خلال السنة n ($n \geq 1$).

(1) أحسب u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 ، u_6 و u_7 .

(2) أثبت أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

(3) عين u_n بدلالة n .

(4) ابتداء من أي سنة يفوق المرتب 25000 DA ؟

B. تقترح مؤسسة اقتصادية أخرى عقدا للتوظيف كما يلي :مرتب شهري بـ 15000 DA في الشهر الأول و زيادة

في المرتب الشهري تقدر بـ 1500 DA بعد كل سنة نسبي v_1 المرتب الشهري في السنة الأولى .

نرسم بـ v_n للمرتب الشهري خلال السنة n ($n \geq 1$).

(1) أحسب v_2 ، v_3 ، v_4 ، v_5 ، v_6 و v_7 .

(2) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

(3) عين v_n بدلالة n .

(4) ابتداء من أي سنة يفوق المرتب 25000 DA ؟

نشاط ثالث

A. نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{x+6}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند -6 . فسر بيانيا النتيجة.
3. أحسب نهاية f عند $+\infty$.
4. أدرس اتجاه تغير الدالة f .
5. أنجز جدول تغيرات الدالة f .
6. عين نقاط المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.
7. أرسم (Δ) و (C_f) .

B. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$u_0 = -5 \text{ و من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$$

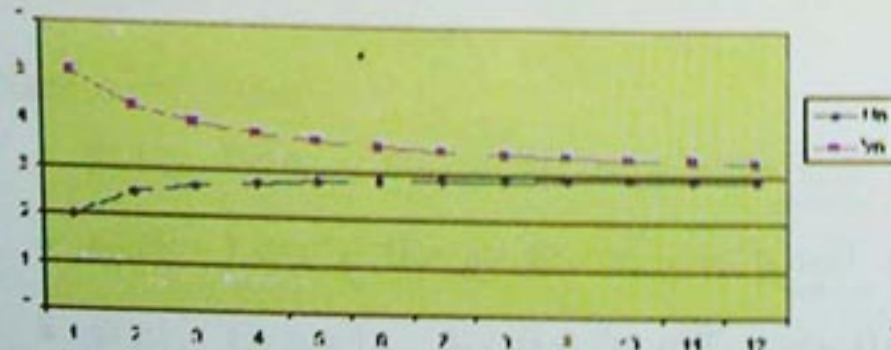
1. تحقق أن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. باستعمال حاسبة بيانية عين u_1, u_2, u_3 و u_4 .
3. باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود u_1, u_2, u_3 و u_4 .
4. ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
5. باستعمال الحاسبة البيانية خمن من أي عدد يقترب u_n أكثر فأكثر لما يصبح n كبيراً جداً.
6. إذا فرضنا أن تخمينك السابق صحيح أثبت صحة التخمين الذي وضعته في السؤال 4.

نشاط رابع

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما : من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{3n+2}{n+1}$.

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما : من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $v_n = \frac{3n+10}{n+2}$.

1. أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة.
2. أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة.
3. عين نهاية المتتالية $u_n - v_n$.
4. الرسم المقابل يعطي التمثيل البياني للمتتاليتين (u_n) و (v_n) باستعمال مجلد اكسال.
ماذا تلاحظ حول نهاية (u_n) و حول نهاية (v_n) .



١. تذكير حول المتتاليات العددية .

١. تعريف .

تعريف: متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$.

٢. اتجاه تغير متتالية عددية.

متتالية متزايدة: تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل

عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} \geq u_n$ ، $(u_{n+1} > u_n)$ على الترتيب .

متتالية متناقصة: تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل

عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} \leq u_n$ ، $(u_{n+1} < u_n)$ على الترتيب .

متتالية ثابتة: تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ، $u_{n+1} = u_n$.

متتالية رتيبة: إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) أو متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) نقول أن المتتالية رتيبة (رتيبة تماما على الترتيب) .

٣. المتتاليات الحسابية.

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من

أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$.

الحد العام و مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) \text{ و } u_n = u_0 + nr$$

٤. المتتاليات الهندسية.

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (عدد حقيقي غير معدوم) إذا

و فقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \times q$.

الحد العام و مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) \text{ و } u_n = u_0 \times q^n \text{ مع } q \neq 1 \text{ و إذا كان } q = 1 \text{ فإن } S = (n+1)u_0$$

نهاية متتالية هندسية.

• إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة .

• إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة .

• إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. المتتالية (u_n) متقاربة .

• إذا كان $q \leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة) .

تمرين محلول 1: لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها الأول $u_0 = 3$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = u_n - 5n - 1$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حددها الأول.

• أحسب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n) . استنتج (u_n) بدلالة n .

الحل: • الحد الأول للمتتالية (v_n) هو $v_0 = u_1 - u_0 = 3 - 5(0) - 1 - 3 = -1$.

لدينا $u_{n+1} - u_n = -5n - 1$. إذن: $v_n = -5n - 1$.

• $v_{n+1} - v_n = -5$: إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = -5(n+1) - 1 - (-5n - 1) = -5$.

و منه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ و حددها الأول $v_0 = -1$.

• من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = -1 - 5n$. $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{n}{2}(5 + 5 - 5n) = \frac{n}{2}(-2 - 5n)$.

$u_n = S + u_0$ نجد $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$ ، ... ، $v_1 = u_2 - u_1$ ، $v_0 = u_1 - u_0$

و منه $u_n = \frac{n}{2}(-2 - 5n) + 3$.

تمرين محلول 2: لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حددها الأول.

• أحسب v_n بدلالة n ، استنتج u_n بدلالة n ، ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n) .

• ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

• أحسب نهاية v_n بدلالة n ثم أحسب نهاية S . استنتج نهاية (u_n) .

الحل:

• $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3$.

$v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$ إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حددها الأول $v_0 = -1$.

• من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

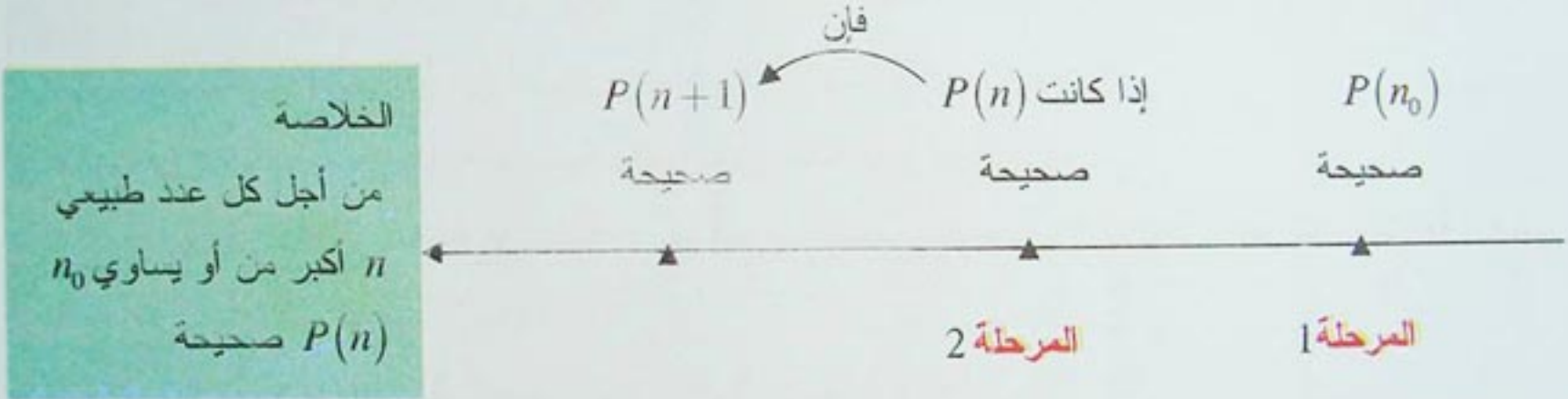
• $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$.

• $v_{n+1} - v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{2}{3}$. إذن $v_{n+1} - v_n > 0$ و منه (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• $-1 < \frac{1}{3} < 1$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ و بالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} S = -\frac{3}{2}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

لـ الاستدلال بالتراجع.

1. مبدأ الاستدلال بالتراجع.

مسئمة: $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n . n_0 عدد طبيعي.للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n_0)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.ملاحظات: • عند الانتهاء من المرحلتين نقر أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .• نترجم الشرط الثاني بالقول أن الخاصية وراثية أي أنها تنتقل من عدد طبيعي n إلى العدد الذي يتبعه $n+1$.• التأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 ضروري لأنه يمكن أن تكون خاصية وراثية دون أن تكون صحيحة،مثلا : الخاصية " 3^n يقبل القسمة على 5 " خاصية خاطئة بالرغم من أنها وراثية .

2. متى يستعمل الاستدلال بالتراجع.

يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على صحة خاصية متعلقة بالأعداد الطبيعية.

مثال: أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3 .الحل: الخاصية " $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3 " متعلقة بالعدد الطبيعي n . نستعمل الاستدلال بالتراجع .المرحلة 1 : من أجل $n=0$ ، $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ ، و 3 مضاعف للعدد 3 .المرحلة 2 : نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كفي . أي : $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3 .و نضع $4^n + 2 = 3k$ حيث k عدد طبيعي . و منه $4^n = 3k - 2$ و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $4^{n+1} + 2$ مضاعف للعدد 3 .

$$4^{n+1} + 2 = 4^n \times 4 + 2 = (3k - 2) \times 4 + 2$$

$$4^{n+1} + 2 = 12k - 8 + 2 = 3(4k - 2)$$

و $3(4k - 2)$ مضاعف للعدد 3 و منه $4^{n+1} + 2$ مضاعف للعدد 3 .إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3 .

تمرين محلول 1: أثبت باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 6 :

$$3^n \geq 100n$$

	A	B	C	D
1	n	3	100n	
2	0	1	0	
3	1	3	100	
4	2	9	200	
5	3	27	300	
6	4	81	400	
7	5	243	500	
8	6	729	600	
9	7	2187	700	
10	8	6561	800	
11	9	19683	900	
12	10	59049	1000	

الحل: نسمي $P(n)$ الخاصية $3^n \geq 100n$

المرحلة 1: نتأكد من صحة $P(6)$

من أجل $n=6$ ، $3^6 = 729$ و $6 \times 100 = 600$

و منه $3^6 \geq 6 \times 100$ وبالتالي $P(6)$ صحيحة .

المرحلة 2 : نفرض الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل عدد

طبيعي n كفي أكبر من أو يساوي 6 أي $3^n \geq 100n$ (فرضية

التراجع) .

ونبرهن أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$

أي $3^{n+1} \geq 100(n+1)$

لدينا $3^{n+1} = 3 \times 3^n$

من فرضية التراجع $3^{n+1} \geq 3 \times 100n$ و منه $3^{n+1} \geq 2 \times 100n + 100n$

من $n \geq 6$ نستنتج أن $2 \times 100n \geq 1200$ و بالأخص $2 \times 100n \geq 100$

من $3^n \geq 100n$ (فرضية التراجع) و $2 \times 100n \geq 100$ ، نستنتج $3^{n+1} \geq 100n + 100$ و منه $3^{n+1} \geq 100(n+1)$

أي أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل $n+1$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 6 : $3^n \geq 100n$

تمرين محلول 2: أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 .

الحل: الخاصية $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 " متعلقة بالعدد الطبيعي n . نستعمل الاستدلال بالتراجع .

المرحلة 1 : من أجل $n=0$ ، $3^{2(0)+1} + 2^{0+2} = 3 + 4 = 7$ و 7 مضاعف للعدد 7 .

المرحلة 2 : نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كفي . أي : $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 .

و نضع $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$ حيث k عدد طبيعي . و منه $3^{2n+1} = 7k - 2^{n+2}$

ونبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ مضاعف للعدد 7 .

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+3}$$

$$= 3^{2n+1} \times 3^2 + 2^{n+2} \times 2$$

$$= (7k - 2^{n+2}) \times 3^2 + 2^{n+2} \times 2$$

$$= 7k \times 9 - 2^{n+2} \times 9 + 2^{n+2} \times 2$$

$$= 7k \times 9 + 2^{n+2} \times (-7)$$

$$= 7(k \times 9 - 2^{n+2})$$

و منه $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ مضاعف للعدد 7 .

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 .

١. تقارب متتالية عددية.

نهاية متتالية عددية.

تذكير و تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة. و نكتب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$) في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ حيث α عدد حقيقي، إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = \frac{-4n+1}{3n+2}$.
• عين نهاية المتتالية (u_n) .

الحل: المتتالية (u_n) من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على $[0, +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{-4x+1}{3x+2}$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{4}{3}$ إذا $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{4}{3}$. إذن المتتالية (u_n) متقاربة.

ملاحظة: العكس غير صحيح:

مثال: لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x \cos(2px)}{x+1}$ ، الدالة المرفقة

بالممتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = \frac{n}{n+1}$.

نلاحظ فعلا بأن $u_n = f(n) = \frac{n}{n+1}$ حيث أن من أجل كل عدد طبيعي n : $\cos(2pn) = 1$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ (نطبق النظريات على النهايات) و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ غير موجودة.

تعريف: (u_n) متتالية عددية.

• القول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أن كل مفتوح $[\alpha, +\infty[$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة. و نرمز: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

• القول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أن كل مجال مفتوح $]-\infty, \alpha[$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة. و نرمز: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ و α عدد حقيقي.

• إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
• إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

تمرين محلول 1: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{3n^2 - 5n + 1}{n^2 + 5}$

عين نهاية هذه المتتالية .

الحل: لتكن f الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و منه $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 5}$ و المعرفة على $\mathbb{R}$

و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية (u_n) لها نفس النهاية

مع الدالة المرفقة لها و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

تمرين محلول 2: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \sqrt{\frac{4n+3}{n+1}}$

عين نهاية هذه المتتالية .

الحل: المتتالية (u_n) من الشكل $u_n = f(v_n)$ حيث $v_n = \frac{4n+3}{n+1}$ و $f(x) = \sqrt{x}$ الدالة العددية حيث

المعرفة على $[0; +\infty[$.

الدالة المرفقة بالمتتالية (v_n) هي الدالة g حيث $g(x) = \frac{4x+3}{x+1}$ المعرفة على $[0; +\infty[$.

و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية (v_n) لها نفس النهاية

مع الدالة المرفقة لها و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$ و بالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{4} = 2$

تمرين محلول 3: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$

• أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_n \neq 1$.

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية ثم استنتج نهاية (u_n) .

الحل: • نستعمل الاستدلال بالتراجع

المرحلة 1 : من أجل $n = 0$ ، $u_0 = 3$ و الخاصية صحيحة.

المرحلة 2 : نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كفي موجب تماما. أي : $u_n \neq 1$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} \neq 1$ و نبرهن بالخلف . نفرض $u_{n+1} = 1$

أي $\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} = 1$ و نستنتج أن $u_n = 1$ و هذا يتناقض مع فرضية التراجع . إذن من أجل كل عدد طبيعي n $u_n \neq 1$.

• $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1}$ و منه $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}$ و بالتالي $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 1}{3u_n - 3} = \frac{1}{3}$

إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ لأن $r > 0$

و نستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

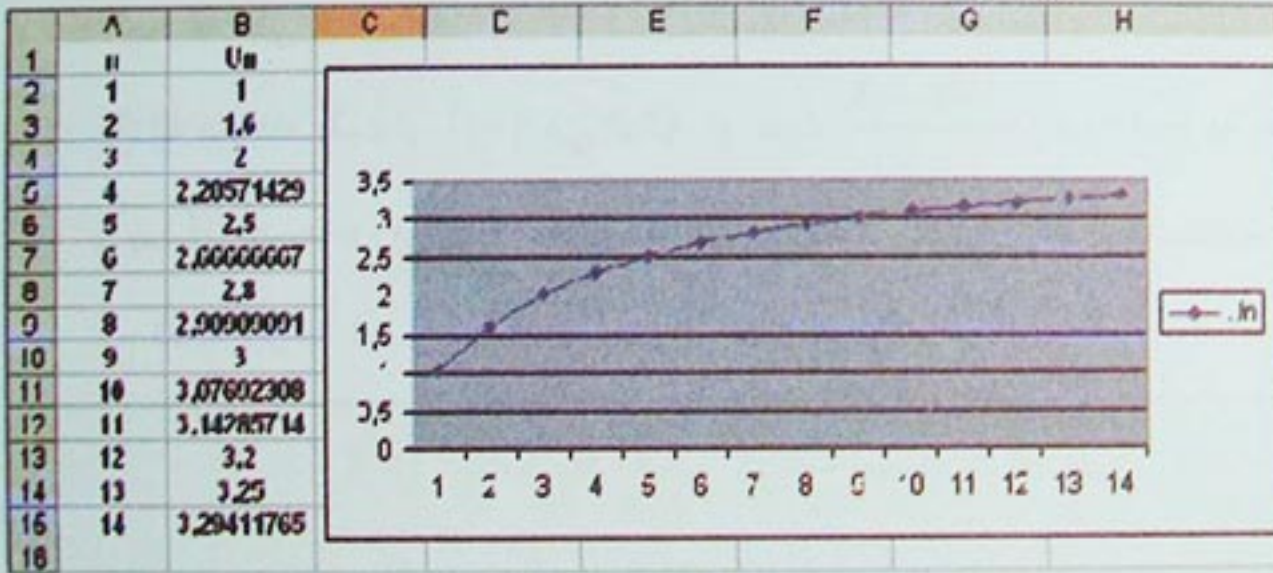
١. متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل، متتالية محدودة.

تعريف: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n :
 $u_n \leq A$. نقول أن A عنصر حاد من الأعلى .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n :
 $u_n \geq B$. نقول أن B عنصر حاد من الأسفل .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل .

مثال 1: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$u_n = \frac{4n}{n+3} \text{ : من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم}$$



الجدول المقابل يعطي قيم المتتالية (u_n) من أجل قيم n من 1 إلى 14 و يعطي التمثيل البياني للمتتالية . انطلاقاً من هذا نخمن أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 1 هو عنصر حاد من الأسفل . لنبرهن على صحة هذا التخمين .

لنقارن بين $4n$ و $n+3$. $4n - (n+3) = 3n - 3 = 3(n-1)$. وبما $n \geq 1$ فإن $4n - (n+3) \geq 0$.

و منه $4n \geq (n+3)$ و بالتالي $\frac{4n}{n+3} \geq 1$ إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n \geq 1$.
 و المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل .

مثال 2: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$u_n = \frac{2n+3}{n} \text{ : من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم}$$

المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و 5 عنصر حاد من الأعلى .
 المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 2 عنصر حاد من الأسفل .
 و منه المتتالية (u_n) متتالية محدودة .

مبرهنة: تقبل بدون برهان .

- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

تمرين محلول 1: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{n^2 + n + 9}{n}$.
أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل.

طريقة: لإثبات أن متتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ محدودة من الأسفل بعدد حقيقي B (أو محدودة من الأعلى بعدد A) يمكن إتباع إحدى الطرق الآتية .

- استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq B$ (أو لإثبات $u_n \leq A$) .
- المقارنة بين u_n و B (أو u_n و A) بدراسة إشارة $u_n - B$ (أو $u_n - A$) .
- إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة على المجال $[0; +\infty[$.

الحل:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ حيث:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 9}{x}$$

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماماً $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2}$ ونحصل على التغيرات الآتية :

x	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$			7

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً فإن $f(x) \geq 7$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :
 $u_n \geq 7$ ، و المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 7 عدد حاد من الأسفل .

تمرين محلول 2: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 4}$.
أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2.

الحل:

نحسب الفرق $u_n - 2$

$$u_n - 2 = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 4} - 2 = \frac{2n^2 + 1 - 2n^2 - 8}{n^2 + 4} = \frac{-7}{n^2 + 4}$$

من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{-7}{n^2 + 4} \leq 0$ و بالتالي:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 2 \leq 0$.

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2$.

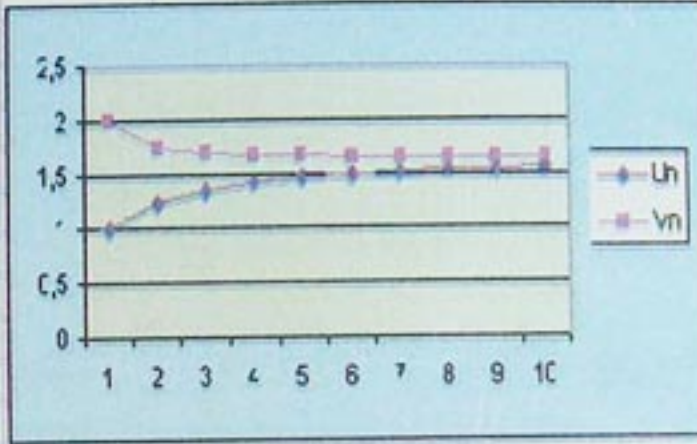
إن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و 2 عنصر حاد من الأعلى .

١. متتاليتان متجاورتان.

تعريف: تكون متتاليتان عدديتان متجاورتين إذا كانت و فقط إذا إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة ، و الفرق بينهما يؤول إلى الصفر .

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.
لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	Un	Vn					
2	1	1	2					
3	2	1.25	1.75					
4	3	1.36111111	1.69444444					
5	4	1.42361111	1.67361111					
6	5	1.46361111	1.66361111					
7	6	1.49138889	1.65805556					
8	7	1.51179705	1.6546542					
9	8	1.52742205	1.65242205					
10	9	1.53976773	1.65087884					
11	10	1.54976773	1.64976773					



الجدول المقابل يعطي قيم المتتاليتين (u_n) و (v_n) من أجل قيم n من 1 إلى 10 و يعطي التمثيل البياني للمتتاليتين . انطلاقاً من هذا نخمن أن المتتاليتين متجاورتان .
لنبرهن على صحة هذا التخمين .

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) .$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \text{ أي}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ و منه (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n} \right) .$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)^2} \text{ أي}$$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ و منه (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

$$u_n - v_n = u_n - \left(u_n + \frac{1}{n} \right) .$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ و } u_n - v_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0 \text{ إذن}$$

بما أن (u_n) متزايدة ، (v_n) متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ فإن (u_n) و (v_n) متجاورتان .

مبرهنة: إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين متجاورتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

تمرين محلول 1: لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$$u_0 = 12, v_0 = 1 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$

- (1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول. أحسب w_n بدلالة n . ما هي نهاية (w_n) ؟
- (2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة. ما هي نهاية (t_n) ؟
- (3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.
- (4) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n .

الحل:

$$(1) \text{ لدينا } w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{12} w_n \text{ أي } w_{n+1} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12} = \frac{u_n - v_n}{12}$$

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ وحدها الأول $w_0 = 11$

من أجل كل عدد طبيعي $n : w_n = 11 \left(\frac{1}{12} \right)^n$. بما أن $1 > \frac{1}{12} > -1$ و $(w_n) - 1 < \frac{1}{12}$ متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

$$(2) t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4}$$

أي $t_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 3u_n + 8v_n = t_n$ و $t_{n+1} = t_n$ و المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t_0 = 44$

$$(3) u_{n+1} - u_n = \frac{-2(u_n - v_n)}{3} = -\frac{2}{3} w_n \text{ و } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3}$$

إذن: $u_{n+1} - u_n = -\frac{22}{3} \left(\frac{1}{12} \right)^n$ و منه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n < 0$ و المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(u_n - v_n)}{4} = \frac{1}{4} w_n \text{ و } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4}$$

إذن: $v_{n+1} - v_n = \frac{11}{4} \left(\frac{1}{12} \right)^n$ و منه من أجل كل عدد طبيعي $n : v_{n+1} - v_n > 0$ و المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• نعلم أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ و أن $w_n = u_n - v_n$ و بالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

إذن (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة و الفرق بينهما يؤول إلى 0 . إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

(4) المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية .

نعلم أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t_0 = 44$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3u_n + 8v_n = 44$

نستنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$

دراسة متتالية تراجعية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

1. دراسة مثال: نريد دراسة المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$$

(1) باستعمال مجزول ، نحسب الحدود الأولى للمتتالية (u_n) .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	u_n	0	3	1.5	2.25	1.875	2.0625	1.96875	2.015625	1.992188	2.0039063	1.9980469	2.0009377	1.999512	2.000244

ضع تخميننا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و حول تقاربها .

(2) لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

أرسم (Δ) التمثيل البياني الدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

أرسم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

ضع على محور الترتيب u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 . هل تخميناتك تبدو صحيحة .

(3) أحسب العدد a فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (D) .

نضع $v_n = u_n - a$. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية .

عين نهاية (v_n) و نهاية (u_n) .

2. الحالة العامة:

لتكن المتتالية التراجعية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها الأول u_0 و العلاقة $u_{n+1} = au_n + b$ حيث a و b عدنان حقيقيان .

(1) عين طبيعة المتتالية (u_n) من أجل $a = 0$.

(2) أثبت أنه إذا كان $a = 1$ ، فإن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

(3) نفرض $a \neq 1$ و $a \neq 0$.

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$ ، ليكن المستقيمان (D) و (Δ) بالمعادلتين

$$y = ax + b \text{ و } y = x$$

• ما هي الوضعية النسبية للمستقيمين (D) و (Δ) ؟

• عين a فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .

• لتكن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي $v_n = u_n - a$ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

(4) نضع $a = -1$ و نفرض أن u_0 غير معدوم .

أوجد الحدود السبعة الأولى بدلالة u_0 . ضع تخميننا ثم برهن صحة هذا التخمين .

♦ متتالية متقاربة نحو العدد e .

1. تعيين حصر للعدد e^x .

(1) الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^x - (1+x)$.

أدرس تغيرات الدالة f .

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $(1) \dots 1+x \leq e^x$.

(3) باستعمال المتباينة (1) ، أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x أصغر تماما من 1 $(x < 1)$:

$$(2) \dots e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

2. تعيين حصر للعدد e .

n عدد طبيعي غير معدوم.

(1) باستعمال المتباينة (1) ، أثبت أن : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

(2) باستعمال المتباينة (2) ، أثبت أن : $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

3. e نهاية متتالية.

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، كما يلي :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0 \leq e - u_n \leq \frac{3}{n}$.

(2) أثبت أن المتتالية (u_n) تتقارب نحو e .

(3) باستعمال آلة حاسبة ، عين قيمة مقربة لكل من الأعداد : u_{100} ، u_{1000} ، u_{10000} .

تطبيق.

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

لتكن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$.

(1) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

(2) أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

(3) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$ ، ماذا تستنتج؟

(4) أثبت أن (u_n) و (v_n) تتقاربان نحو e .

حساب مساحة.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نريد حساب مساحة السطح المحدود بالمنحنى (C_f) ، محور الفواصل و المستقيمين (D) و (D')

المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=2$.

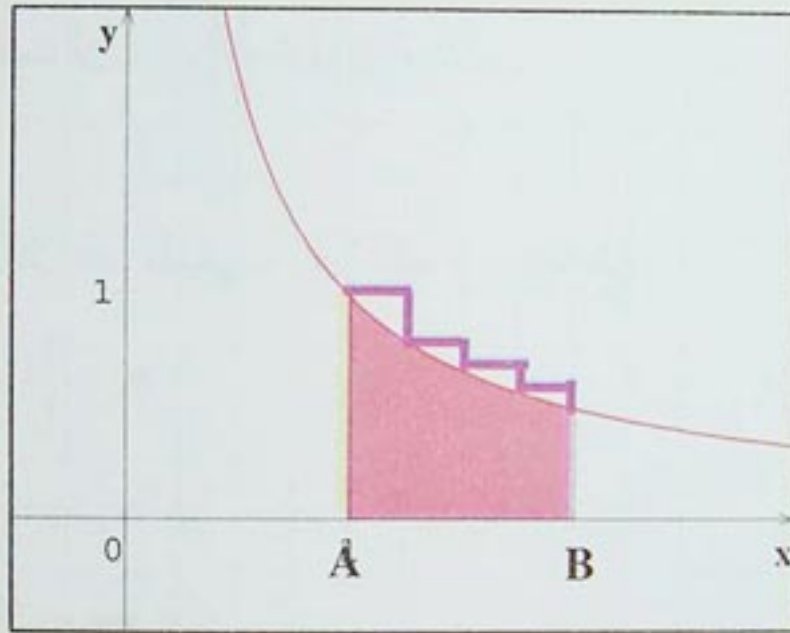
على محور الفواصل نضع النقطة A التي فاصلته 1 و النقطة B التي فاصلتها 2.

ليكن n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2. نجزئ القطعة $[AB]$ إلى n جزء متقايسة.

ليكن E جزء المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المحورين.

نسمي u_n مجموع مساحات المستطيلات المحتواة في E ونسمي v_n مجموع مساحات المستطيلات التي تحوي E .

و عليه لدينا $u_n \leq S \leq v_n$



(1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 لدينا:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

(2) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة.

(3) أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة.

(4) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$.

ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) ؟

(5) عين عدد طبيعي p حتى تكون قيمة مقربة لـ S إلى 10^{-2} .

(6) عين عدد طبيعي q حتى تكون قيمة مقربة لـ S إلى 10^{-4} .

(7) باستعمال آلة حاسبة، عين: u_{50} ، u_{500} .

متتالية متقاربة نحو العدد: $\ln(2)$.

الجزء الأول .

(u_n) متتالية عددية معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

(2) باستعمال مجدول ، أحسب الحدود الأولى للمتتالية (u_n) .

الجزء الثاني .

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ حيث أن :

$$f(x) = \ln(x)$$

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0; +\infty[$ لدينا :

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي p لدينا :

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$$

(3) n عدد طبيعي غير معدوم .

(a) أكتب الحصر السابق من أجل قيم p الآتية : $n, n+1, \dots, 2n-1$.

(b) بجمع طرفا إلى طرف المتباينات المحصل عليها ، أثبت أن :

$$u_n \leq \ln(2) \leq u_n + \frac{1}{2n}$$

(4) أثبت أن (u_n) تتقارب نحو $\ln(2)$.

موضوع محلول

تمرين :

نعرف متتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ومن

$$u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3, \quad n \text{ كل عدد}$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n = 2^{-n} - 2n + 1$$

2. (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + tn - 1$:

بين أنه إذا كان $t \neq 2$ ، فإن المتتالية (v_n) تكون متباعدة .

أثبت أنه يوجد عدد طبيعي t ؛ تكون من أجله المتتالية

(v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

3. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر

النقط A ، B ، C و G حيث :

$$4\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ مع } \lambda \text{ عدد حقيقي.}$$

عين λ حتى تكون النقطة G مرجحا للنقط A ، B و C

المرفقة بالمعاملات S_0 ، S_1 و S_2 على الترتيب .

حل مختصر

1. نضع $p(n)$ الخاصية $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$. الخاصية الابتدائية $p(0)$

محقة لأنه $u_0 = 2^{-0} - 2 \times 0 + 1 = 2$. نفرض أن الخاصية $p(k)$ صحيحة من

أجل عدد طبيعي k أي $u_k = 2^{-k} - 2k + 1$. ولنبرهن صحة الخاصية $p(k+1)$

أي لنبرهن صحة المساواة $u_{k+1} = 2^{-(k+1)} - 2(k+1) + 1$. من المعطيات لدينا

$$u_k - 2u_{k+1} = 2k + 3 \text{ معناه } u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k - k - \frac{3}{2} \text{ وباستعمال فرضية التراجع نجد}$$

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}(2^{-k} - 2k + 1) - k - \frac{3}{2} = 2^{-k-1} - 2k - 1 \text{ ومعناه } u_{k+1} = 2^{-(k+1)} - 2(k+1) + 1 \text{ أي } u_{k+1} = 2^{-(k+1)} - 2(k+1) + 1 \text{ إذن}$$

الخاصية الوراثية $p(k+1)$ صحيحة

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$.

2. $v_n = u_n + tn - 1 = 2^{-n} + (t-2)n$. وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} = 0$ ؛

فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n| = +\infty$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} |t-2|n = +\infty$. إذن (v_n) متباعدة .

$$v_{n+1} = 2^{-n-1} + (t-2)(n+1) = \frac{1}{2}2^{-n} + (t-2)n + (t-2)$$

$$v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n = 0, \quad n \in \mathbb{N} \text{ من أجل كل } v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}(t-2)n + (t-2)$$

$$\text{معناه } \frac{1}{2}(t-2)n + (t-2) = 0 \text{ وهذا يعني أن } t-2 = 0 \text{ أي } t = 2$$

إذن $t = 2$ يكافئ أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 1$

$$S_n = v_0 \frac{1-2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}} \text{ أي } S_n = 2 - 2^{-n}$$

$$(3) \quad 2\overrightarrow{GA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{GB} + \frac{7}{4}\overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ و } 2 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} \neq 0 \text{ ، } S_2 = \frac{7}{4} \text{ و } S_1 = \frac{3}{2} \text{ ، } S_0 = 2$$

معناه $4\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \frac{7}{2}\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ بما أن $4\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ فإن

$$\lambda\overrightarrow{GC} = \frac{7}{2}\overrightarrow{GC} \text{ بما أنه لا يمكن لـ } G \text{ أن تنطبق على القطر } A, B \text{ و } C \text{ فإن } \lambda = \frac{7}{2}$$

تعاليلق

مبدأ التراجع يتضمن شرطين $\square$ صحة

الخاصية الابتدائية وصحة الخاصية

الوراثية . ويستعمل في البرهان

الخصائص المتعلقة بعدد طبيعي .

تكون المتتالية (v_n) متقاربة إذا

و فقط إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ مع

l عدد حقيقي .

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا

و فقط إذا وجد عدد حقيقي q يحقق

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $v_{n+1} = qv_n$.

يجب مراعاة عدد الحدود في

المجموع .

بكل تحفظ ، لاستعمال المرجح يجب

التحقق من أن مجموع المعاملات غير

معدوم .

تنبيه

الهدف من هذا التمرين هو تحديد نهاية مشتركة لمتتاليتين وتوظيف البرهان بالتراجع وخاصية تجاوز متتاليتين .

تمرين

- نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ و $v_n = \frac{7}{u_n}$.
- أحسب الحدود $v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$.
 - أعط القيمتين الظاهرتين على شاشة الحاسبة للحددين u_3 و v_3 .
 - برر بالتراجع أن : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ و $v_n > 0$.
 - برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.
 - استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \geq 0$.
 - أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة والمتتالية (v_n) متزايدة .
 - برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{21}{8}$.
 - برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.
 - استنتج باستعمال البرهان بالتراجع أن : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2n-1}}$.
 - استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان . ما هي نهايتهما المشتركة .
 - برر أن u_3 هو قيمة مقربة إلى 10^{-7} للعدد $\sqrt{7}$.
 - عين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون u_n قيمة مقربة إلى 10^{-100} للعدد $\sqrt{7}$.

توجيهات

- برهن على الخاصيتين معا و $u_{p+1} > 0$ تستنتج من $\frac{u_p + v_p}{2}$ و $v_{p+1} > 0$ من المعطيات .
- أكمل الحساب... $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}}(u_{n+1}^2 - 7)$. الاستنتاج باستعمال السؤال 2 .
- أحسب العبارتين $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ واستعمل السؤال السابق .
- لاحظ $u_n \geq v_n \geq v_1$. وبالنسبة $4u_{n+1} \geq 4 \times \frac{21}{8} \geq 10$ لاحظ واستعمل .
- استعمل التراجع للبرهان على الخاصية $u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2n-1}}$.
- لتعيين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$ لديك $0 \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2n-1}}$ ومن $v_n = \frac{7}{u_n}$ يكون $l^2 = 7$.
- يجب تبين أن $\sqrt{7}$ هي قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد u_n .

تمارين تطبيقية

1 - تذكير بالمتتاليات العددية .

1 في كل حالة من الحالات التالية ، عين بيانيا الحدود الاولى للمتتالية (u_n) ، ثم أعط تخمينا حول اتجاه تغيرها ونهايتها .

$$a. \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

2 (u_n) متتالية حسابية أساسها r . (v_n) و (w_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n على الترتيب

$$b. : v_n = \frac{3}{5}u_n - \frac{1}{2} \text{ و } w_n = u_{3n} + \sqrt{7}$$

بين أن المتتاليتين (v_n) و (w_n) حسابيتان مطلوب تعيين الأساس لكل منهما .

3 أحسب أقياس زوايا مثلث قائم حيث هذه الأقياس تشكل حدود متتابعة لمتتالية حسابية .

4 (v_n) متتالية معرفة بـ $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}$

1 برر أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n > 0$.

2 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n = \frac{1}{v_n}$. بين أن (u_n) متتالية حسابية .

5 (u_n) متتالية حسابية حيث $u_3 = 13$ و $u_7 = 37$. أحسب u_{17} .

6 (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 و $u_1 = -2$.
1 أكتب u_n بدلالة n .

2 أحسب $u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$.

7 أحسب المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 10$.

8 من أجل كل عدد طبيعي n نضع $u_n = \frac{5^n}{7^{n+1}}$.

بين أن المتتالية (u_n) هندسية بطلب تحديد أساسها .

9 (u_n) متتالية هندسية حيث $u_7 = \frac{1}{216}$

$$\text{و } u_{10} = \frac{27}{1331} \text{ أحسب } u_{30} .$$

10 (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_1 = -2$.

1 أكتب u_n بدلالة n .

2 أحسب المجموع $u_1 + u_2 + \dots + u_7$.

3 لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي

$$\text{غير معدوم } n \text{ بـ } v_n = u_{2n} .$$

أحسب المجموع $v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

11 (u_n) متتالية هندسية غير منتهية حدودها موجبة

$$\text{تماما حيث : } u_0 = 2 \text{ و } u_3 = 9u_1$$

1 عين أساس المتتالية (u_n) .

2 أحسب u_n بدلالة n .

3 أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

2 - الاستدلال بالتراجع .

12 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

13 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

14 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

15 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 4$

$$\text{و } u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$$a. u_n > 1 \quad b. u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$$

16 المتتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.
أثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة .

17 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 0,5$ و $u_{n+1} = (u_n)^2$.

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$ ،
(2) استنتج تغيرات المتتالية (u_n) .

18 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7 .

19 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n} - 1$ مضاعف للعدد 8 .

20 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n+1} - 2^{2n+2}$ مضاعف للعدد 7 .

21 p_n هي الخاصية " $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3" .

هل الخاصية p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ؟

22 (1) أثبت أنه إذا وجد عدد طبيعي n بحيث 9 يقسم $10^n + 1$ فإن 9 يقسم $10^{n+1} + 1$.

(2) هل من أجل كل عدد طبيعي n ، $10^n + 1$ مضاعف للعدد 9 ؟

3- تقارب متتالية عددية .

23 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير

$$\text{معنوم } n : u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

جد عددا طبيعيا n_0 حيث إذا كان $n > n_0$ فإن $-10^{-3} < u_n < 10^{-3}$.

24 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$u_n = n\sqrt{n}$$

جد عددا طبيعيا n_0 حيث إذا كان $n > n_0$ ، فإن $u_n > 10^6$.

25 المتتالية (u_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$u_0 = 3$. ابتداء من أي دليل يكون $u_n < 10^{-5}$ ؟

26 المتتالية (u_n) هندسية أساسها 3 وحدها الأول

$u_0 = 1$. ابتداء من أي دليل يكون $u_n > 10^{12}$ ؟

في التمارين من 27 إلى 30 المطلوب حساب نهاية المتتالية (u_n) المقترحة .

27 (1) $u_n = \frac{3n+2}{2n-1}$ (2) $u_n = \frac{5n-2}{4n-3}$.

(3) $u_n = 2n - \frac{2}{n+1}$ (4) $u_n = \frac{n}{3} - 4 + \frac{n+2}{n^2+1}$.

28 (1) $u_n = \frac{7n^2-3n+2}{n^2-n+1}$.

(2) $u_n = \frac{-n^2+4n+2}{(n+2)^2}$.

(3) $u_n = \frac{-3n+12}{n^2+1}$.

(4) $u_n = \frac{n^2+2n}{4n+3}$.

29 (1) $u_n = \sqrt{\frac{3n+2}{2n+1}}$ (2) $u_n = \sqrt{\frac{n^2+2}{n+3}}$.

(3) $u_n = \frac{\sqrt{n}+2}{2n+1}$ (4) $u_n = \frac{n\sqrt{n}+n}{n+1}$.

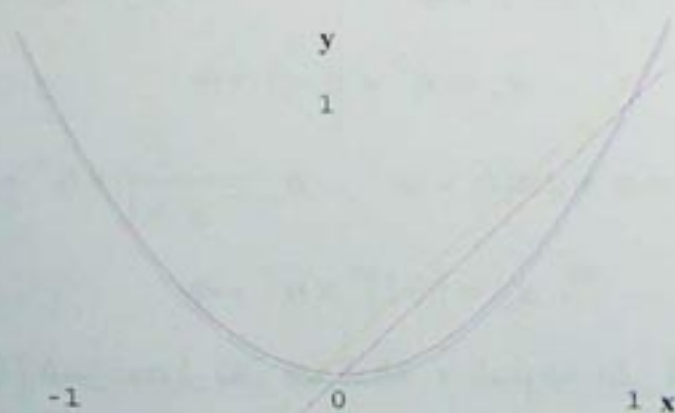
30 (1) $u_n = \sin\left(\frac{3\pi n+2}{2n+\pi}\right)$.

(2) $u_n = \cos\left(\frac{-3\pi n+2}{n+2\pi}\right)$.

(3) $u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{17}$.

31 في الشكل لدينا C التمثيل البياني للدالة $f : x \mapsto x^2$

و Δ المستقيم ذو المعادلة $y = x$



(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ :

(2) أثبت أن العدد $\frac{1}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 4 بـ : $u_n = \frac{1}{n^2 - 5n + 6}$.

5. المتتاليتان المتجاورتان .

38 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{-1}{2n+4}$ و $v_n = \frac{1}{n+1}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان ثم جد نهايتهما المشتركة .

39 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{n-1}{n}$ و $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان ثم جد نهايتهما المشتركة .

40 في كل حالة من الحالتين المقترحتين أدناه ، هل المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتين ؟

أ - (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = \frac{2n-3}{n+1}$ و $v_n = \frac{2n+3}{n+1}$.

ب - (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$ و $v_n = 3 - \frac{5}{n}$.

41 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \text{ و } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

42 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد

طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

$$\text{و } v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

$u_n = f(n)$ ، $v_{n+1} = f(v_n)$ و v_0 عدد حقيقي معلوم .

(1) عين إحداثيي نقطتي تقاطع المنحني C والمستقيم Δ .

(2) ما القول عن اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

هل هي مقاربة ؟

(3) بتمثيل الحدود الأولى للمتتالية (v_n) ، أعط تخميناً حول

رتابتها ونهايتها في الحالات التالية :

$$v_0 = 1,1 \text{ و } v_0 = -1,1 \text{ ، } v_0 = 0,8$$

(4) هل يمكن اختيار v_0 حتى تكون المتتالية (v_n) ثابتة .

4. المتتاليات المحدودة .

32 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير

$$\text{معدوم } n \text{ بـ : } u_n = 5 - \frac{10}{n^2}$$

من بين الأعداد الحقيقية التالية : 0 ؛ 6 ؛ 4,99999 ؛ 5 ؛ ما هي العناصر الحاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

في كل من التمارين من 33 إلى 36 ، أذكر إن كانت المتتالية (u_n) المقترحة تقبل عنصراً حاداً من الأسفل ، عنصراً حاداً من الأعلى . هل هي محدودة ؟

33 أ - $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)$. ب - $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.

ج - $u_n = 1 + \frac{1}{n+2}$. د - $u_n = \frac{1}{1+n^2}$.

34 أ - $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. ب - $u_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$.

$$\text{ج - } u_n = \frac{-3}{\sqrt{3n+2}}$$

35 أ - $u_n = 2^n$. ب - $u_n = n\sqrt{3} - 2$.

$$\text{ج - } u_n = n^2 + n - 1$$

36 أ - $u_n = \frac{1}{n+1} + n^2$. ب - $u_n = n + \cos n$.

$$\text{ج - } u_n = (-1)^n \times n^2$$

37 (1) أنجز جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

43 المتتاليان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

44 المتتاليان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

تمارين متنوعة

1- تذكير بالمتتاليات العددية .

45 برهن أن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$$u_n = \frac{\ln n}{n} \text{ هي متناقصة ابتداء من الرتبة } 3 .$$

46 أثبت أن المتتالية $u : n \mapsto \frac{5^n}{n!}$ متناقصة ابتداء من رتبة يطلب تعيينها .

47 أثبت أن المتتالية $u : n \mapsto \frac{n!}{7^n}$ متزايدة ابتداء من رتبة يطلب تعيينها .

48 المتتاليان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

طبيعي غير معدوم n : $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$ برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة

و أن المتتالية (v_n) متناقصة .

49 بكالوريا

(1) (v_n) متتالية حسابية حذها الأول v_1 وأساسها r

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 24 \\ v_4 + v_5 + v_6 + v_7 = 74 \end{cases}$$

أ - عين r و v_1 علما أن

ب - استنتج v_n بدلالة n وعين أصغر عدد طبيعي n يحقق $v_n > 6023$.

(2) (u_n) متتالية حسابية حذها الأول u_1 وأساسها d .
نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،
 $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

عين u_1 و d حتى يكون $2S_n = n(3n+7)$ وهذا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

50 (u_n) متتالية حسابية أساسها -5 و $u_0 = -4$.
(1) أكتب u_n بدلالة n .

(2) أحسب المجموع $S = u_{26} + u_{27} + \dots + u_{125}$.

51 لتكن (u_n) متتالية معرفة على بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $4u_{n+1} - 2u_n = 9$.

و لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ،
 $v_n = 2u_n - 9$

أ - أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 .
ب - برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .
ج - جد عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

د - أحسب بدلالة n المجموع $v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ثم استنتج بدلالة n المجموع $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

52 لتكن (u_n) متتالية معرفة على بـ $u_0 = 14$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4u_n + 3$.

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $v_n = u_n + 1$.
(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(2) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(3) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث :

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$$

53 (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 علما أن $u_0 = \frac{2}{9}$

أحسب المجموع $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{10}$

54 أحسب المجموع :

$$S = 0,02 - 0,1 + 0,5 - 2,5 + \dots + 312,5$$

55 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد حقيقي n :

$$u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$$

أحسب بدلالة n المجموع $u_0 + u_1 + \dots + u_n$

56 لتكن المتتالية (u_n) ذات الحد الأول $u_1 = 1$ ،

وحيث من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 ،

$$u_{n+1} = 2u_n + 3$$

من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 ، نضع :

$$v_n = u_n + 3$$

(1) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

- أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(2) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$$s_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

- أثبت أن $u_1 + u_2 + \dots + u_n + 3n$ مضاعف للعدد 4

وهذا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

57 (u_n) هي المتتالية المعرفة بـ $u_0 = \frac{1}{6}$ ومن أجل

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{5}{8} , n \text{ عدد طبيعي}$$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_n = 2u_n + \frac{5}{3} : \text{ بـ}$$

(1) أحسب الحدود u_1, u_2, u_3 ثم v_0, v_1, v_2 .

(2) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

- أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(3) أحسب بدلالة n كلا من s_n و t_n حيث :

$$t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n , s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

58 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 2 , u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1} : n \geq 1 \end{cases}$$

من أجل كل $n \geq 1$

(1) جد عددين حقيقيين a و b حيث $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=1 \end{cases}$.

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $v_n = u_{n+1} - au_n$.
برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها b .

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $w_n = u_{n+1} - bu_n$.
برهن أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها a .

(4) أكتب v_n و w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
59 a, b, c أعداد حقيقية غير معدومة .

(1) بين أنه إذا كانت a, b, c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن :

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)(a-b+c)$$

(2) جد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أن

مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276 .

60 a, b, c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية .

$$\begin{cases} a+b+c=36,75 \\ abc=343 \end{cases}$$

أحسب a, b, c علما أن

61 a, b, c ثلاث أعداد حقيقية مع $a \neq 0$.

نفرض أن a, b, c تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها q ؛ و $3a, 2b, c$ تشكل ثلاث

حدود متتابعة لمتتالية حسابية . أحسب q .

62 a عدد حقيقي معطى .

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = a$ ومن أجل كل

$$u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n , n \text{ عدد طبيعي غير معدوم}$$

(1) (v_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي

غير معدوم n بـ : $v_n = 13u_n - 4$.

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q .

(2) عبر عن v_n بدلالة a و n ؛ ثم استنتج عبارة u_n

بدلالة a و n .

(3) أحسب بدلالة a و n المجموع :

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

63 يرمز (α_n) إلى متتالية هندسية غير منتهية ، كل حدودها موجبة حيث حدّها الأول : $\alpha_1 = 3$ ،
و $\alpha_3 + \alpha_5 = \frac{15}{16}$

(1) عين أساس المتتالية (α_n) .

(2) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

(3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع

$$\beta_n = \ln(\alpha_n) \quad (\ln \text{ هو اللوغاريتم النيبيري})$$

أ - برهن أنّ (β_n) هي متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

ب - أحسب بدلالة n المجموع t_n حيث :

$$t_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$$

64 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع :

$$A_n = \underbrace{11\dots1}_n$$

(عدد من n رقم مساويا لـ 1 مثلا $A_4 = 1111$) .

أحسب $S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$.

65 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع :

$$A_n = \underbrace{33\dots3}_n$$

(عدد من n رقم مساويا لـ 3 مثلا $A_5 = 33333$) .

أحسب $S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$.

66 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 5$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5u_n - 7n$ ؛

$$v_n = u_n - \frac{7}{4}n - \frac{7}{16}$$

(1) باستعمال مجداول إكسل نريد حساب الحدود العشر

الأولى لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

ولهذا ، أحجز في الخلية B1 العدد 0 ثم باستعمال الفأرة

واللمسة $ctrl$ نسحب إلى اليمين ؛ نحجز في الخلية B2

العدد 5 .

في الخليتين C2 و B3 وباستعمال اللمسة = نحجز
العبارتين الموضوعتين في الشكل ثم أسحب كل منهما إلى
اليمين باستعمال الفأرة واللمسة $ctrl$.

	A	B	C	D
1	u_n	0	1	2
2	u_n	5	5*82-7*31	
3	u_n	62-7/4*82-7/16		
4				

بملاحظتك للسطر الثالث ، أعط تخمينا لطبيعة المتتالية

(v_n) .

(2) برهن التخمين الموضوع في السؤال السابق ثم عبر عن

u_n و v_n بدلالة n .

(3) أحسب $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

67 (u_n) هي المتتالية المعرفة بـ $u_0 = -2$ ومن أجل

كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$ ، α و β

عدنان حقيقيان غير معدومين ويختلفان عن 1 .

(1) جد علاقة تربط بين العددين α و β التي تجعل

المتتالية (u_n) ثابتة .

(2) نفرض أن المتتالية (u_n) ليست ثابتة ونعتبر المتتالية

(v_n) المعرفة من أجل كل من أجل كل عدد طبيعي n بـ

$v_n = u_n + \gamma$ حيث γ عدد حقيقي غير معدوم .

أ - عين γ بدلالة α و β حيث تكون المتتالية (v_n)

هندسية .

ب - نضع $\alpha = 3$ ، $\beta = 2$ و $\gamma = 1$.

أحسب المجموعين S_n و t_n حيث

$$t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n , S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

2 - الاستدلال بالتراجع .

68 بكالوريا

نضع $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ حيث n عدد طبيعي

غير معدوم .

(1) أ - أحسب S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 .

ب - عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

69 نضع $t_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$

حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

(1) أحسب t_1 ، t_2 ، t_3 و t_4 . عبر عن t_{n+1} بدلالة t_n .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$$t_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) , n$$

70 من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ،

نضع :

$$s_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \dots + (n-1)2^{n-2}$$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ،

$$s_n = (n-1)2^n - n \times 2^{n-1} + 1 = 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)2^n$$

71 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

❖ الرمز $n!$ يقرأ عاملي n ومعرف بـ :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

72 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير

معدوم n ،

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

73 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير

معدوم n ، $n! \geq 2^{n-1}$.

74 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو

يساوي 4 لدينا : $2^n \geq n^2$.

75 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر

من أو يساوي 2 ، $5^n \geq 4^n + 3^n$.

76 متباينة برنولي (Bernoulli)

a عدد حقيقي موجب تماما .

(1) برهن أنه أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

(2) استنتج أنه إذا كان $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

(تبرير المبرهنة المقبولة في السنة الثانية)

77 (1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو

يساوي 2 ، $3n^2 \geq (n+1)^2$.

(2) نسمي P_n الخاصية : $3^n \geq 2^n + 5n^2$.

أ — ما هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم n الذي من

أجله تكون الخاصية P_n صحيحة ؟

ب — برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو

يساوي 5 ، تكون الخاصية P_n صحيحة .

78 من أجل كل عدد طبيعي n ، نسمي P_n الخاصية :

$$3^n \geq (n+2)^2$$

(1) من بين الخواص P_0 ، P_1 ، P_2 و P_3 عين منها

الصحيحة .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو

يساوي 3 ، تكون الخاصية P_n صحيحة .

79 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 1$ و من أجل

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

(1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 ؛ أعط تخميناً لعبارة u_n

بدلالة n .

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

80 الهدف التعبير عن u_n بدلالة n .

المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 7$ و من أجل كل عدد طبيعي

$$u_{n+1} = 10u_n - 18 , n$$

(1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 .

لاحظ النتائج هي أعداد تتكون من أرقام وسطها أسفار ؛

أعط العلاقة بين عدد الأسفار و n .

(2) أعط تخميناً لعبارة u_n بدلالة n ، ثم برهن بالتراجع هذا التخمين.

81 المتتالية معرفة بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

(1) أحسب u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 . أعط تخميناً لعبارة $(3 - u_n)$ بدلالة n .

(2) برهن بالتراجع التخمين الموضوع سابقاً، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

82 المتتالية معرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4 - u_n$.

(1) أحسب u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 . أعط تخميناً لعبارة u_n بدلالة n .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{2n+1} = 1$ و $u_{2n} = 3$.

83 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع، $s_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.

(1) أحسب s_1, s_2, s_3, s_4 . أعط تخميناً لعبارة s_n بدلالة n .

(2) برهن هذا التخمين بالتراجع.

(3) لاحظ المجموع s_n وأعط برهاناً آخرًا للتخمين.

84 المتتالية معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = n + u_n$.

(1) أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) وأعط تخميناً لعبارة u_n بدلالة n .

(2) استعمل البرهان بالتراجع لتعيين عبارة u_n بدلالة n .

85 المتتالية معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2}$.

(1) أحسب الحدود الستة الأولى للمتتالية (u_n) وأعط تخميناً لعبارة u_n بدلالة n .

(2) استعمل البرهان بالتراجع لتعيين عبارة u_n بدلالة n .

86 المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 2$.

(1) المتتالية المعرفة بـ $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = v_n + u_n$.

(2) عبر عن u_n بدلالة n .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 1 + n^2$.

87 المتتالية معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

(1) أدرس رتبة المتتالية (u_n) .

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > n^2$.

88 المتتالية معرفة بـ $u_0 \in]0; 1[$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

89 المتتالية معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 2$.

أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة ماما.

90 المتتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$.

(1) تحقق من أن الحدود u_1, u_2, u_3 تنتمي إلى المجال $[0; 4]$.

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$.

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

91 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 0,6 u_n - 1,2$.

(1) برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً.

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -3$.

92 المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3}$.

- (1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$.
- (2) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

93 θ عدد حقيقي من المجال $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2 \cos \theta$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

- (1) أ- أحسب u_1 و u_2 .
ب- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.

- (2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2 \cos \frac{\theta}{2^n}$.

94 متتالية معرفة بـ :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) \text{ و } u_0 = 5$$

- (1) باستعمال الآلة الحاسبة أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .
- (2) أعط تخميننا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم برهن هذا التخمين باستعمال البرهان بالتراجع .

95 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم نضع : $u_n = n \times 2^{n-1}$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + (n-1)2^n$.

96 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

- (1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم لدينا :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{n+1}$$

- (2) استنتج قيمة المجموع

$$\frac{1}{1427 \times 1428} + \frac{1}{1428 \times 1429} + \dots + \frac{1}{2007 \times 2008}$$

97 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يوجد عدنان طبيعيان p_n و q_n حيث $(2 + \sqrt{3})^n = p_n + q_n \sqrt{3}$.

98 (1) المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_1 = 1$ ، $u_2 = 3$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

أ- أحسب الحدود u_3 ، u_4 و u_5 . أعط تخميننا لعبارة u_n بدلالة n .

ب- برهن بالتراجع هذا التخمين .

(2) المتتالية (v_n) معرفة بـ $v_0 = \frac{2}{5}$ ، $v_1 = 1$ ومن

أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n$.

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{2^n + 3^n}{5}$.

99 المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ ومن

أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} + u_{n-1} = 4u_n$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n = \frac{1}{2} \left[(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right]$$

100 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 2$ و من أجل كل

عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

برهن أن :

أ- من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -1$.

ب- المتتالية (u_n) رتيبة .

ج- من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

101 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل

عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{u_n - 2}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 4}$.

- (1) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .

- (2) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

102 p الدالة كثيرات الحدود المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\cdot u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right) \quad (2) \quad \cdot u_n = e^{1-n} \quad (1) \quad \mathbf{106}$$

$$\cdot u_n = \ln(3 + e^{2-n}) \quad (4) \quad \cdot u_n = (n+2)e^{-n} \quad (3)$$

$$\cdot u_n = \frac{e^{-n} - 1}{2e^{-n} + 1} \quad (6) \quad \cdot u_n = \frac{e^n - 6}{2e^n + 1} \quad (5)$$

$$\cdot u_n = \ln\left(\frac{e^n + 2}{e^{2n} + 1}\right) \quad (8) \quad \cdot u_n = \ln\left(\frac{e^n - 3}{e^n + 1}\right) \quad (7)$$

$$\cdot u_n = n^2 \left(\sqrt{3 + \frac{2}{n+1}} - \sqrt{3} \right) \quad (1) \quad \mathbf{107}$$

$$\cdot u_n = \sqrt{3n^2 - 1} - \sqrt{3}n \quad (2)$$

$$\cdot u_n = \frac{n}{\sqrt{n+2}} - \frac{n}{\sqrt{n+1}} \quad (3)$$

$$\cdot u_n = \frac{3n - \sqrt{9n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 5}} \quad (4)$$

$$u_n = \frac{3,01^n}{3^n} \quad \text{ب.} \quad \cdot u_n = \frac{2^n}{5^n} \quad \text{أ.} \quad \mathbf{108}$$

$$\cdot u_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} \quad \text{ج.}$$

$$(u_n) \text{ و } (v_n) \text{ متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل } \mathbf{109}$$

$$\text{كل عدد طبيعي } n : u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n + 1}$$

$$\text{و } v_n = \frac{1}{u_n}$$

$$(1) \text{ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n > 0$$

$$(2) \text{ برهن أن } (v_n) \text{ متتالية حسابية.}$$

$$(3) \text{ استنتج نهاية المتتالية } (u_n).$$

$$(u_n) \text{ و } (v_n) \text{ متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل } \mathbf{110}$$

$$\text{كل عدد طبيعي } n : u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$$

$$\text{و } v_n = u_n + 3. \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي } n,$$

$$s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \text{ و } t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$(1) \text{ برهن أن المتتالية } (v_n) \text{ هندسية.}$$

$$(2) \text{ عين نهاية لكل من المتتاليات } (u_n), (s_n) \text{ و } (t_n).$$

$$\cdot p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

$$(1) \text{ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي } x,$$

$$\cdot p(x+1) - p(x) = x^2$$

$$(2) \text{ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n,$$

$$\cdot p(n) \in \mathbb{N}$$

$$(3) \text{ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n,$$

$$p(n+1) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$\mathbf{103} \text{ المتتالية } (u_n) \text{ معرفة بـ } u_1 = 0 \text{ ومن أجل كل}$$

$$\cdot u_{n+1} = \frac{-1}{u_n - 2}, \text{ عدد طبيعي غير معدوم } n,$$

$$\cdot u_{2006} \text{ أعط القيمة المضبوطة للحد}$$

$$\mathbf{104} \text{ برهن بالتراجع أنه كل عدد طبيعي } n \text{ أكبر من أو}$$

$$\text{يساوي 24 يمكن كتابته } n = 5a + 7b \text{ مع } a \text{ و } b$$

$$\text{عددين طبيعيين.}$$

$$\mathbf{105} (1) \text{ المتتالية المعرفة بـ } u_1 = \frac{1}{2} \text{ ومن أجل}$$

$$\cdot u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n} \right) u_n, \text{ كل عدد طبيعي غير معدوم } n,$$

$$\text{أ - أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية } (u_n).$$

$$\text{ب - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير}$$

$$\text{معدوم } n, u_n = \frac{n}{2^n}.$$

$$(2) \text{ عدد طبيعي غير معدوم } k, (v_n) \text{ المتتالية المعرفة بـ}$$

$$v_1 = \frac{1}{k} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n,$$

$$\cdot v_{n+1} = \left(\frac{n+1}{kn} \right) v_n$$

$$\text{أعط تخميناً لعبارة } v_n \text{ بدلالة } n \text{ ثم برهن بالتراجع هذا}$$

$$\text{التخمين.}$$

$$\mathbf{3.} \text{ تقارب متتالية عددية.}$$

$$\text{في التمارين 106 إلى 108 المطلوب حساب نهاية}$$

$$\text{المتتالية } (u_n) \text{ المقترحة.}$$

(2) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 30 ، يكون $u_n \geq 2^n$ ؛ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .
1117 (1) أكتب برنامجا للمتتالية u المعرفة بـ $u_0 = 1$ والعلاقة التراجعية $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

(2) ابتداء من أي دليل تصبح حدود المتتالية مستقرة على شاشة الحاسبة .

ما هو التخمين الذي يمكن وضعه ؟

(3) أثبت أنه إذا كانت المتتالية u متقاربة فإن نهايتها هي العدد الذهبي $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

1118 عين نهاية المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ
 $u_n = 0,57 \dots 57$ ، ... ، $u_2 = 0,5757$ ، $u_1 = 0,57$
 (رقما $2n$)

1119 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :
 $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

(1) باستعمال مجداول أو حاسبة بيانية ، أعط القيمة العشرية المقربة للحدود u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 ، ثم للحدود u_{10^n} حيث العدد n يتغير من 1 إلى 13 .

(2) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$ ،
 استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

(3) اشرح لماذا يظهر تناقض في النتيجةين للسؤالين السابقين .

120 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 1$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}$.

(1) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة .

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية :
 $x = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$

1111 جد نهاية لكل من المتتاليات (u_n) ، (v_n) ،
 (w_n) و (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير
 معدوم n بـ : $u_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1}$ ؛ $v_n = \frac{u_n}{n}$ ؛
 $w_n = u_n - n$ ؛ $t_n = \frac{v_n - 1}{w_n - 1}$

1112 جد نهاية لكل من المتتاليات (u_n) ، (v_n) و (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$u_n = \frac{3n^2 - 4}{n + 1}$ ؛ $v_n = \frac{u_n}{n}$ ؛ $w_n = u_n - 3n$

1113 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير
 معدوم n بـ : $u_n = \frac{1}{n!}$

(نذكر من أجل $n \geq 1$ ، $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$)

(1) أحسب الحدود الستة الأولى للمتتالية (u_n) .

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$0 < u_n \leq \frac{1}{n}$ ؛ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

1114 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير
 معدوم n بـ : $u_n = \frac{\cos(3n - \pi)}{\sqrt{n}}$

تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ؛ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

1115 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :
 $u_n = n + 1 - \cos \frac{n\pi}{5}$

تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $n \leq u_n \leq n + 2$ ؛
 ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

1116 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير
 معدوم n بـ : $u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$

(1) أعط القيم المقربة لأحد عشر الحدود الأولى من المتتالية (u_n) .

124 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 5$ والعلاقة

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \text{ التراجعية}$$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

(2) برر أن المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها l أكبر من أو

تساوي 2.

(3) بين أن l تحقق $l = \sqrt{2+l}$. استنتج قيمة l .

125 نعتبر المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة $f: x \mapsto \ln(x+1) - x$

المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$.

(2) استنتج أن: من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$,

$$\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

ثم من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq u_n$.

ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

(3) أكتب برنامجا الذي يحدد أصغر عدد طبيعي n يحقق:

$$u_n \geq 10$$

4 - المتتاليات المحدودة.

126 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \text{ و } v_n = \frac{1}{n} \text{ عدد طبيعي غير معدوم بـ:}$$

(1) أثبت أن 1 عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) .

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n < v_n$.

(3) هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) محدودتين ؟

127 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير

معدوم بـ:

$$u_n = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

(1) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.

(2) أعط عبارة مختصرة للحد u_n .

(3) هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

(3) إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة، فما هي نهايتها ؟

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n , $v_n = u_n - 7$.

أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية، أكتب عبارة الحد

العام v_n بدلالة n , استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

121 (1) برهن أنه ابتداء من رتبة مطلوب تعيينها، يكون

$$2^n \leq (n-1)!$$

(2) بين أن المتتالية ذات الحد العام $\frac{2^n}{n!}$ متقاربة.

122 a عدد حقيقي و (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$u_0 = a \text{ والعلاقة التراجعية: } u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n}$$

(1) برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}$.

(2) استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $|u_n| \leq \frac{|a|}{2^n}$.

(3) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

123 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$ والعلاقة

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1} \text{ التراجعية:}$$

(1) أ- برر أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$, u_n موجب تماما.

ب- إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فما هي نهايتها ؟

(2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس،

أنشئ C المنحني الممثل للدالة $f: x \mapsto \frac{x+2}{2x+1}$ ، ثم

المستقيم Δ ذي المعادلة $y = x$ (يقتصر الرسم على

المجال $[0; 2, 2]$). مثل الحدود u_1, u_2, u_3 .

ما هو تخمينك حول تقارب المتتالية (u_n) .

(3) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية متقاربة ثم عبر عن

v_n بدلالة n .

ب- عبر عن u_n بدلالة v_n ثم برر التخمين الموضوع

سابقا.

128 المتتالية (u_n) معرفة بـ :

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

(1) هل العدد $\frac{3}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

(2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة ، استنتج أنها متقاربة .

(3) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

129 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول u_0 ومن

$$u_{n+1} = e^{-u_n} , n \text{ عدد طبيعي}$$

برهن أنه ابتداء من الدليل 2 تكون المتتالية (u_n) محدودة

بالعدين 0 و 1 وهذا مهما كان اختيارا الحد الأول u_0 .

130 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}$$

(1) ما هو اتجاه التغير للمتتالية (u_n) ؟

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

(3) استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة . هل العدد

1,333333 عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

131 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ u_0 عدد حقيقي

معطى و من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 5$$

(1) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \geq 1$ ، ماذا تستنتج ؟

(2) نفترض أن المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها l . أكتب معادلة من الدرجة الثانية تكون محقق من أجل l .

(3) استنتج أن المتتالية (u_n) متباعدة . هل هي محدودة ؟

ما القول عن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ؟

132 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = \frac{11}{4}$ ومن أجل

$$u_{n+1} = 3u_n - 4 , n \text{ عدد طبيعي}$$

(1) أحسب الحدين u_1 و u_2 .

(2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = 4u_n + \alpha \text{ حيث } \alpha \text{ عدد حقيقي}$$

أ - عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية .

ب - باستعمال قيمة α المحصل عليها سابقا ، أكتب v_n

بدلالة n ثم عبر عن u_n بدلالة n .

ج - هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

د - نضع من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$w_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \dots + \frac{u_n}{4^n}$$

برهن أن المتتالية (w_n) متقاربة .

5 - المتتاليتان المتجاورتان .

133 لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرفتين على $\mathbb{N}^*$

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \text{ و } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

(1) برهن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

(2) استنتج عددا طبيعيا p حيث u_p تكون قيمة مقربة إلى

10^{-3} بالنقصان للنهائية l المشتركة بين المتتاليتين (u_n)

و (v_n) .

أعط قيمة u_p على شكل كسر غير قابل للاختزال وكذلك

قيمته المقربة المحصل عليها بالحاسبة .

134 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ : $u_0 = 0$ ،

$$v_0 = 2 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4}$$

$$\text{و } v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n \leq 1 \leq v_n$$

(2) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان وجد

نهایتها المشتركة .

(2) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ : $u_0 = 1$ ،

$v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$ ،

$$v_{n+1} = f(v_n)$$

باستعمال حاسبة بيانية مثل منحنى الدالة والمستقيم ذي

$$y = x \text{ المعادلة}$$

أعط تخميناً حول اتجاه تغير وتقارب لكل من المتتاليتين

$$(u_n) \text{ و } (v_n)$$

(3) برهن بالتراجع عن الخواص التالية :

من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 2$ ،

$1 \leq v_n \leq 2$ ، $u_n \leq u_{n+1}$ و $v_n \geq v_{n+1}$ ،

(4) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$$

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n - u_n \geq 0$ ،

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n) \text{ و}$$

$$\text{أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ، } v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

استنتج أن للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس النهاية l .

عين القيمة المضبوطة للعدد l .

138 a و b عددين حقيقيين حيث $0 < a < b$.

المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان بـ : $u_0 = a$ ، $v_0 = b$ ،

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ ،

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

u_{n+1} يسمى الوسط الهندسي للحددين u_n و v_n ؛

v_{n+1} يسمى وسطهما الحسابي .

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n \leq v_n$ ،

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

$$\text{استنتج أن } v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(b - a)$$

135 نعرف المتتاليتين (u_n) و (v_n) بـ : $u_0 = 1$ ،

$v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ ، } v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$$

(1) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $w_n = u_n - v_n$ ،

برهن أن المتتالية (w_n) هندسية . عين نهايتها ثم عبر

عن w_n بدلالة n .

(2) عبر عن $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ بدلالة w_n ؛ استنتج

اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(3) بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) ولهما نفس النهاية

يرمز لها l .

(4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $t_n = 3u_n + 10v_n$ ،

برهن أن المتتالية (t_n) ثابتة . استنتج قيمة l .

136 نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ :

$u_0 = 3$ ، $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ ؛ } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

(1) أحسب u_1 ، v_1 ، u_2 و v_2 .

(2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $w_n = v_n - u_n$ ،

بين أن المتتالية (w_n) هندسية وعين نهايتها .

(3) أدرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم استنتج

أنهما مجاورتان .

(4) برهن أن (t_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد

$$\text{طبيعي } n \text{ بـ : } t_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$$

برهن أن (t_n) متتالية ثابتة .

عين l ، النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

137 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; 2]$ بـ :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة f . استنتج أنه إذا كان

$$x \in [1; 2] \text{ ، فإن } f(x) \in [1; 2]$$

(3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

(4) نفرض أن $a = 2$ و $b = 5$ ، والعدد l هو النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

استعمل نتيجة السؤال الثاني لتعيين القيمة المقربة إلى 10^{-3} للنهاية l .

139 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان بـ : $u_0 = -1$ ،

$v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ ،

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$$

(1) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n < v_n$$

ب - برهن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

(2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $x_n = u_n + av_n$ ،

و $y_n = u_n + bv_n$ حيث a و b عددين حقيقيين متميزين .

جد a و b حيث تكون المتتاليتان (x_n) و (y_n)

هندسيتين ثم عبر عن x_n و y_n بدلالة n .

(3) جد النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

مسائل

140 لتكن (E) مجموعة المتتاليات غير المعدومة (u_n)

المعرفة على $\mathbb{N}$ والتي تحقق الخاصية التالية :

$$u_{n+2} = \frac{3}{35}u_{n+1} + \frac{2}{35}u_n$$

(1) هل توجد في المجموعة (E) متتالية ثابتة ؟ متتالية

حسابية ؟ متتالية هندسية ؟

(2) تحقق أنه من أجل كل عددين حقيقيين α و β تكون

المتتالية (u_n) ذات الحد العام $u_n = \alpha \left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta \left(\frac{-1}{5}\right)^n$

هي عنصر من المجموعة (E) .

(3) عين المتتالية (u_n) ذات الحد العام

$$u_n = \alpha \left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta \left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

علمنا أن $u_0 = 3$ و $u_1 = -\frac{4}{35}$. أحسب نهاية هذه المتتالية .

141 $(1 - I)$ أدرس اتجاه تغير الدالتين f و g

المعرفتين على المجال $[0; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x)$$

$$g(x) = \ln(1+x) - x$$

(2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad (1)$$

II - في هذا الجزء نريد دراسة المتتالية (u_n) المعرفة

بـ : $u_1 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$$u_n > 0 \quad , \quad n$$

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$\ln u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$(3) \text{ نضع : } S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \quad \text{و}$$

باستعمال العلاقة (1) برهن أن :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

(4) أ - أحسب S_n و T_n بدلالة n .

ب - استنتج نهاية لكل من المتتاليتين (S_n) و (T_n) .

(5) دراسة تقارب المتتالية (u_n)

أ- برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ب- استنتج أنها متقاربة .

ج- نقبل النتيجة التالية: إذا كانت المتتاليتان (α_n) و (β_n)

متقاربتين حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $\alpha_n \leq \beta_n$ ،

فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$.

أعط حصرا لنهاية المتتالية (u_n) .

142 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد

طبيعي غير معدوم n :

$$u_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2}$$

$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \text{ و}$$

(1) أثبت أن المتتالية (v_n) متقاربة ونهايتها هي $\frac{1}{2}$.

(2) نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على المجال

$$[0; +\infty[: x \mapsto x - \sin x ; f :$$

$$g : x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x ;$$

$$h : x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x .$$

أدرس اتجاه تغير لكل من الدوال f ، g و h مبينا أن كل

من هذه الدوال موجبة .

(3) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4$$

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$v_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq v_n$$

(4) أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة ، وما هي نهايتها ؟

143 - I لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} : \text{ بـ}$$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على المجال

$$]0; +\infty[: \text{ بـ } g(x) = 1+x + \ln x ; \text{ ثم بين أن}$$

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث

$$0,27 \leq \beta \leq 0,28 .$$

(2) من أجل $x > 0$ عبر عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$.

— استنتج تغيرات الدالة f .

— أحسب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.

II - نريد دراسة المعادلة $f(x) = n$ حيث n عدد

طبيعي غير معدوم .

(1) بين أنه من أجل كل n هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا

$$\alpha_n$$

(2) المقارنة بين α_n و e^n .

أ- بين أن $f(e^n) \leq n$ ، استنتج أن $\alpha_n \geq e^n$.

ب- أثبت أن العلاقة $f(\alpha_n) = n$ يمكن كتابتها على

$$\text{الشكل } \ln \left(\frac{\alpha_n}{e^n} \right) = \frac{n}{\alpha_n} \dots (1) .$$

استعمل (أ) لاستنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{e^n}$.

(3) المقارنة بين α_n و $e^n + n$.

نضع $\alpha_n = e^n (1 + \varepsilon_n)$ حيث $\varepsilon_n \geq 0 \dots (2)$.

أ- باستعمال العلاقة (1) عبر عن $(1 + \varepsilon_n) \ln(1 + \varepsilon_n)$

بدلالة n .

ب- بين أنه من أجل كل $t \geq 0$ ،

$$0 \leq (1+t) \ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}$$

ج- استنتج من (أ) و (ب) أنه من أجل كل $n \geq 1$ ،

$$0 \leq ne^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n} \dots (3) .$$

د- باستعمال (2) و (3) عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^n + n - \alpha_n)$.

اختيار من متعدد

144 في كل سؤال اقترحات موضوعية يمكن أن تكون أكثر من جملة صحيحة؛ المطلوب اختيار الجملة الصحيحة.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 0$ و من أجل كل

$$u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

نعرف المتتاليتين (v_n) و (w_n) بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$

$$w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$$

(1) أ - المتتالية (v_n) حسابية. ب - المتتالية (w_n) حسابية.

ج - المتتالية (v_n) هندسية. د - المتتالية (w_n) هندسية.

$$(2) \quad \text{أ - } v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{ب - } v_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{ج - } w_n = 1$$

$$(3) \quad \text{أ - } u_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

$$\text{ب - } u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$$

ج - المتتالية (u_n) لا تقبل نهاية.

د - المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها $\frac{3}{5}$.

145 في كل من السؤالين ، بالضبط اقتراحين صحيحين المطلوب تعيينهما .

(1) المتتاليات التالية متقاربة :

$$\text{أ - } \frac{2^n}{n^{2008}} \text{ و } n > 0 \quad \text{ب - } \frac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$$

$$\text{ج - } n \sin \frac{1}{n} \text{ و } n > 0 \quad \text{د - } \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \text{ و } n > 1$$

(2) المتتاليات u, v, w تمتاز بالخواص التالية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

$$\text{أ - } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

ب - المتتالية v محدودة من الأسفل .

ج - من أجل كل عدد طبيعي $n, -1 < v_n < 1$.

د - لا يمكن معرفة إن كانت المتتالية v تقبل نهاية أم لا .

أصحح أم خطأ ؟

146 ميز بين الجملة الصحيحة والجملة الخاطئة .

(1) كل متتالية متناقصة هي محدودة من الأعلى .

(2) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0

فتكون نهايتها معدومة .

(3) كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي محدودة .

(4) إذا كانت نهاية متتالية هي $+\infty$ فإن هذه المتتالية تكون

غير محدودة من الأعلى .

(5) كل متتالية متقاربة هي محدودة .

(6) إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين و تحققان

من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n < v_n$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

147 أذكر إن كانت الجملة صحيحة أم خاطئة مبرراً ذلك

(1) إذا كان العدد الحقيقي l هو نهاية المتتالية (u_n) وإذا

كانت المتتالية (v_n) لا تقبل نهاية حقيقية ، فإن المتتالية

$(u_n + v_n)$ لا تقبل نهاية حقيقية .

(2) إذا كان العدد الحقيقي l هو نهاية المتتالية (u_n) وإذا

كانت المتتالية (v_n) لا تقبل نهاية حقيقية ، فإن المتتالية

$(u_n \times v_n)$ لا تقبل نهاية حقيقية .

(3) إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = l$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ، فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

(4) كل المتتالية تكون محدودة من الأسفل أو من الأعلى .

148 بكالوريا

المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1,5$ ومن أجل

كل عدد طبيعي $n, u_{n+1} = 2u_n - 1$ ،

المطلوب تمييز بن الجملة الصحيحة والخاطئة مبرراً ذلك.

(1) المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 1 الذي هو فاصلة نقطة

تقاطع المستقيمين $y = x$ و $y = 2x - 1$.

(2) المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 1$ ،

هي متتالية هندسية .

(3) المتتالية (v_n) محدودة من الأعلى .

القسمة في $\mathbb{Z}$ 02

الكفاءات المستهدفة

- ◆ إثبات أن عدد صحيح يقسم عددا صحيحا آخر.
- ◆ استعمال خواص قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.
- ◆ استعمال خوارزمية إقليدس لتحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.
- ◆ استعمال خوارزمية إقليدس لتحديد القواسم المشتركة لعددين طبيعيين.
- ◆ حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر.

نظرية الأعداد هو فرع من الرياضيات يهتم بخصائص الأعداد الصحيحة، سواء كانت طبيعية أو نسبية، و تتضمن عدة مسائل مفتوحة سهلة الفهم، حتى بالنسبة لغير المختصين. بصفة عامة، المجال الذي تدرسه هذه النظرية يهتم بفئة كبيرة من المسائل التي تأتي من دراسة الأعداد الطبيعية. من الممكن تقسيم نظرية الأعداد إلى عدة مجالات حسب الطريقة المستعملة ونوع المسألة. فهي فرع من فروع الرياضيات تهتم بدراسة خواص وعلاقات الأعداد الصحيحة وتوسعاتها الجبرية والتحليلية.

بعد الإطلاق، نظرية الأعداد تدرس قابلية القسمة و الأوليّة و التحليل (إلى جداء عوامل أولية). كما تدرس خواص التجزئة و ما قارب ذلك. و يوجد فروع أخرى نذكر منها نظرية الأعداد الجبرية التي تعني باستعمال الطرق الجبرية لدراسة الأعداد الصماء و الأعداد المتسامية و نظرية التحليل في التوسعات الجبرية و غير هذا، و نظرية الأعداد التحليلية وهي تستغل طرق التحليل المركب (الأعداد المركبة) حين دراسة بعض خواص الأعداد الأولية. المبرهنة البدائية للأعداد: في هذا المجال، تدرس الأعداد دون اللجوء لتقنيات آتية من فروع أخرى للرياضيات. مسألة قابلية القسمة، خوارزمية إقليدس تمكن من حساب القاسم المشترك الأكبر، تفكيك الأعداد إلى أعداد أولية، البحث عن الأعداد المثالية والتقريب تنتمي لهذا المجال.

النتائج هي مبرهنة فيرما الصغرى و مبرهنة أولير، ثم مبرهنة الباقي الصيني و قانون الانعكاس الرباعي. خاصيات الدوال الجذائية مثل دالة ميبس ودالة أولير تمت دراستها؛ وأيضا المتتاليات مثل عاملي و أعداد فيبوشى.

عدة مسائل المبرهنة البدائية للأعداد تبدو بسيطة تحتاج لتعمق في الرياضيات ولمقاربات جديدة. كما في الأمثلة الآتية:

- حدسية غولدباخ الخاصة بالأعداد الزوجية كجمع عددين أوليين.
- حدسية كاتالان الخاصة بأس أعداد طبيعية متتالية.
- حدسية التوأمين الأولية التي تقول أن مجموعة الأعداد الأولية التوأم غير منتهية.
- حدسية سيراكيز الخاصة بمتتالية بسيطة.

مبرهنة 'المعادلة الديوفانية' تم البرهنة على أنها غير محددة (أنظر مسائل هيلبرت).

تستعمل أدوات الحساب و التحليل العقدي، لدراسة مسائل حول الأعداد الطبيعية. مبرهنة الأعداد الأولية وفرضية ريمان هي بعض الأمثلة.

نشاط أول

صادف أول جانفي 2007 يوم الاثنين . انطلاقا من هذا يمكن تحديد يوم الأسبوع الذي يصادف أي يوم من السنوات السابقة أو اللاحقة :

- (1) نريد معرفة اليوم الذي صادف خمسة جويلية 1962 .
 - ما هو عدد الأيام n التي تفصل بين أول جانفي 2007 وخمسة جويلية 1962 (لا يحسب إلا أحد التاريخين في المجموع كما تؤخذ السنة الكابسة التي عدد أيامها 366 بعين الاعتبار) ؟
 - بقسمة العدد n الموجود سابقا على 7 ، أوجد عدد الأسابيع q التي مرت بين التاريخين .
 - عين العدد r للأيام المتبقية بعد مرور هذه الأسابيع بين التاريخين .
 - أكتب n بدلالة q و r .
 - استنتج يوم الأسبوع الذي صادف خمسة جويلية 1962 .
- (2) بنفس الطريقة عين يوم الأسبوع الذي يصادف أول نوفمبر من السنة القادمة .
- (3) ما هو يوم الأسبوع الذي يصادف الاحتفال بمرور قرن عن تاريخ الاستقلال ؟
- (4) ما هو اليوم الذي صادف تاريخ ميلادك ؟

نشاط ثان

في العصور القديمة كان المصريون يحسنون عملية الضرب في العدد 2 . ويمكنهم ذلك من حساب جداء عددين طبيعيين بسرعة .

مثلا لحساب 59×41 نلاحظ أن $41 = 32 + 8 + 1$

$1 \times 59 = 59$		$\times 2$
$2 \times 59 = 118$		$\times 2$
$4 \times 59 = 236$		$\times 2$
$8 \times 59 = 472$		$\times 2$
$16 \times 59 = 944$		$\times 2$
$32 \times 59 = 1888$		

و نستنتج $59 \times 41 = 1888 + 472 + 59 = 2419$

بنفس الطريقة أحسب ما يلي :

(1) 87×63

(2) 48×125

(3) 14×249

نشاط ثالث

تهتم صارة بجمع الطوابع البريدية و وزعت كل الطوابع التي جمعتها على حاويات شفافة .حيث أن كل حاوية تحتوي على نفس عدد الطوابع المحلية و نفس عدد الطوابع الأجنبية . و حصلت على التوزيع التالي 4 حاويات كل واحدة منها تحتوي على 18 طابعا محليا و 24 طابعا أجنبيا .

(1) ما هو عدد الطوابع المحلية ؟ ما هو عدد الطوابع الأجنبية ؟

(2) عين توزيعا آخر لهذه الطوابع البريدية .

(3) ما هو أكبر عدد t من الحاويات التي يمكن استعماله . اذكر التوزيع المناسب لها .

(4) عين كل التوزيعات الممكنة .

(5) ماذا يمثل عدد التوزيعات بالنسبة إلى العدد t ؟

نشاط رابع

أكمل الجدول وفق المعطيات التالية

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					

أفقيا

(1) مربع تام مجموع أرقامه 25 .

(2) عدد مضاعف لـ 11 .

(3) عدد مضاعف لـ 87 . باقي قسمة 88 على 7 .

(4) عدد أولي . عدد أولي .

(5) باقي قسمة 88 على 7 .

عدد يقبل القسمة على 30

عموديا

(A) مربع تام جداء أرقامه 3024 .

(B) عدد يقبل القسمة على 7 و مجموع أرقامه 19 .

(C) عدد مضاعف لـ 187 . باقي قسمة 762 على 5 .

(D) عدد أولي . مكعب تام .

(E) عدد يقبل القسمة على 10 .

١. قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1. تعريف

تعريف: a و b عددين صحيحان و a غير معدوم. القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث: $b = ka$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a .

نكتب $a|b$ ونقرأ a يقسم b .

أمثلة: $48 = 8 \times 6$ و منه $6|48$

$48 = (-8) \times (-6)$ و منه $(-6)|48$

$(-65) = (-13) \times 5$ و منه $5|(-65)$

$(-65) = (-13) \times 5$ و منه $(-13)|(-65)$

ملاحظة: في $\mathbb{Z}$ للعددين a و $-a$ نفس القواسم.

2. خواص

خاصية 1: a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة.

إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

البرهان: إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإن $b = ka$ و $c = k'b$ حيث k و k' عددين صحيحان و منه $c = (kk')a$ وبما أن kk' عدد صحيح فإن a يقسم c .

خاصية 2: a و b عددين صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a يقسم mb

البرهان: إذا كان $a|b$ فإن $b = ka$ حيث k عدد صحيح و منه $mb = mka = (mk)a$ وبما أن mk عددا صحيحا فإن a يقسم mb .

خاصية 3: a و b عددين صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma يقسم mb

البرهان: إذا كان $a|b$ فإن $b = ka$ حيث k عدد صحيح و منه $mb = mka = k(ma)$ وبما أن k عدد صحيح فإن ma يقسم mb .

تمرين محلول 1: عين الأعداد الصحيحة n حيث :

$$11 \text{ يقسم } n+5$$

طريقة: لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث العدد الصحيح a يقسم عبارة $f(n)$ نستعمل تعريف قابلية القسمة .

الحل:

$$11 \text{ يقسم } n+5 \text{ إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح } k \text{ حيث } n+5=11k .$$

$$\text{ومنه } n=11k-5 .$$

الحلول هي الأعداد الصحيحة من الشكل $11k-5$ مع k عدد صحيح وهي قيم n المطلوبة .

تمرين محلول 2: عين الأعداد الصحيحة n حيث :

$$3n+5 \text{ يقسم } 8 .$$

طريقة: لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث العبارة $f(n)$ تقسم العدد الصحيح a نساوي بين $f(n)$ و قواسم a .

الحل:

$$\text{مجموعة قواسم } 8 \text{ هي } \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\} .$$

$$3n+5 \text{ يقسم } 8 \text{ معناه } 3n+5=-8 \text{ أو } 3n+5=-4 \text{ أو } 3n+5=-2 \text{ أو } 3n+5=-1 \text{ أو } 3n+5=1 \text{ أو } 3n+5=2 \text{ أو } 3n+5=4 \text{ أو } 3n+5=8 .$$

$$\text{أي } 3n=-13 \text{ أو } 3n=-9 \text{ أو } 3n=-7 \text{ أو } 3n=-6 \text{ أو } 3n=-4 \text{ أو } 3n=-3 \text{ أو } 3n=-1 \text{ أو } 3n=3 .$$

$$\text{المعادلات } 3n=-13, 3n=-7, 3n=-4, 3n=-1 \text{ ليس لها حلول .}$$

$$\text{الحلول هي الأعداد الصحيحة } -3, -2, -1, 1 .$$

تمرين محلول 3: عين الأعداد الصحيحة n حيث :

$$3n+8 \text{ يقسم } n+6$$

طريقة: لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث العبارة $f(n)$ تقسم العبارة $g(n)$ نرجع المسألة إلى أن عبارة $h(n)$ تقسم عددا صحيحا a .

الحل:

$$\text{ليكن } n \text{ عدد صحيح حيث } 3n+8 \text{ يقسم } n+6 . \text{ ومنه } 3n+8 \text{ يقسم } 3n+18 . \text{ و بالتالي } 3n+8 \text{ يقسم}$$

$$(3n+18)-(3n+8) \text{ أي } 3n+8 \text{ يقسم } 10 . \text{ مجموعة قواسم } 10 \text{ هي } \{-10; -5; -2; -1; 1; 2; 5; 10\} .$$

$$3n+8 \text{ يقسم } 10 \text{ معناه } 3n+8=-10 \text{ أو } 3n+8=-5 \text{ أو } 3n+8=-2 \text{ أو } 3n+8=-1 \text{ أو } 3n+8=1 \text{ أو } 3n+8=2 \text{ أو } 3n+8=5 \text{ أو } 3n+8=10 .$$

$$\text{أي } 3n=-18 \text{ أو } 3n=-13 \text{ أو } 3n=-10 \text{ أو } 3n=-9 \text{ أو } 3n=-7 \text{ أو } 3n=-3 \text{ أو } 3n=2 .$$

$$\text{ومنه } n=-6 \text{ أو } n=-3 \text{ أو } n=-1 .$$

$$\text{عكسيا هذه الأعداد حلولا (يكفي التعويض في } 3n+8 \text{ و } n+6 \text{ والتأكد في كل مرة من أن } 3n+8 \text{ يقسم } n+6) .$$

$$\text{الحلول هي الأعداد الصحيحة } -6, -3, -1 .$$

خاصية 4: a, b, c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم. إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n ، a يقسم $mb + nc$.

البرهان: إذا كان $a|b$ و $a|c$ فإن $b = ka$ و $c = k'a$ حيث k و k' عدنان صحيحان و منه:

$$mb + nc = mka + nk'a$$

$$mb + nc = (mk + nk')a$$

بما أن $mk + nk'$ عدد صحيح فإن a يقسم $mb + nc$

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

1. القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة: a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم. توجد ثنائية وحيدة (q, r) من الأعداد الصحيحة حيث $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

تسمى عملية البحث عن الثنائية (q, r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b . يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل و باق. القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b .

البرهان: العدد a إما مضاعف لـ b و إما محصور بين مضاعفين متتابعين لـ b أي يوجد q عدد صحيح وحيد

حيث $qb \leq a < (q+1)b$ و نستنتج من هذا أن $0 \leq a - qb < b$.

نضع $r = a - qb$ و منه لدينا $a = bq + r$ مع $0 \leq r < b$.

ملاحظة: يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b .

ونحصل على $a = bq + r$ و $0 \leq r < |b|$.

2. القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

a عدد طبيعي غير معدوم. نرمز بـ D_a إلى مجموعة قواسم العدد a .

مثال: مجموعة قواسم 8 هي $D_8 = \{1; 2; 4; 8\}$.

ملاحظات: مجموعة قواسم 0 هي $\mathbb{N}^*$.

تعريف: a و b عدنان طبيعيين غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب.

$D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b .

يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

و نرمز له بـ $\text{PGCD}(a; b)$.

ملاحظات: $\text{PGCD}(a; a) = a$ و $\text{PGCD}(1; a) = 1$

$\text{PGCD}(0; a) = a$ (a غير معدوم).

مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

تمرين محلول 1: ليكن n عددا صحيحا.

ليكن العددين الصحيحان $a = 5n - 2$ و $b = 2n + 3$.
أثبت أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم العدد 19.

الحل:

ليكن d قاسم مشترك للعددين a و b . ومنه d يقسم $5b - 2a$ أي d يقسم $5 \times (2n + 3) - 2 \times (5n - 2)$
أي d يقسم 19.

تمرين محلول 2: عين الأعداد الصحيحة a و b حيث أن :

$$4a^2 - b^2 = 15$$

طريقة: لحل هذه المعادلة يمكن تحليل الطرف الأول إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى و استغلال قواسم الطرف الثاني.

الحل:

نلاحظ أنه إذا كان a و b حلين للمعادلة فإن $-a$ و $-b$ هما كذلك حلين للمعادلة إذن يمكن البحث عن الحلول الموجبة فقط.

$$(2a - b)(2a + b) = 15 \text{ ومنه } 4a^2 - b^2 = (2a - b)(2a + b)$$

و بالتالي $2a - b$ و $2a + b$ يقسمان 15.

$4a^2 - b^2 > 0$ و بما أننا اعتبرنا $a > 0$ و $b > 0$ فإن $2a - b$ و $2a + b$ عدنان موجبان و $2a + b > 2a - b$.
مجموعة القواسم الموجبة للعدد 15 هي $\{1; 3; 5; 15\}$.

$$\begin{cases} 2a + b = 15 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} 2a + b = 5 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \text{ و بالتالي } \begin{cases} a = 4 \\ b = 7 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

إذا اعتبرنا أن الحلول هي الثنائيات $(a; b)$ و انطلاقا من الملاحظة الأولى نستنتج أن الثنائيات الآتية حلول للمعادلة:

$$(4; 7), (-4; -7), (4; -7), (-4; 7), (2; 1), (-2; 1), (2; -1), (-2; -1)$$

تمرين محلول 3: a عدد صحيح . باقي قسمة a على 10 هو 6 .

1. ما هو باقي قسمة العدد a على 5 ؟

2. ما هو باقي قسمة العدد a على 2 ؟

الحل:

$$a = 10k + 6 \text{ حيث } k \text{ عدد صحيح .}$$

$$a = 10k + 5 + 1$$

$$= 5(2k + 1) + 1$$

ومنه باقي قسمة a على 5 هو 1 .

$$a = 2(5k + 3) \text{ حيث } k \text{ عدد صحيح .}$$

ومنه باقي قسمة a على 2 هو 0 .

3. خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

خاصية 1: a و b عدنان طبيعيان غير معدومين حيث $a \geq b$. r باقي قسمة a على b .

$$PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$$

البرهان: نضع $PGCD(a; b) = d$ و $PGCD(b; r) = d'$.

نعلم أن $a = bq + r$ حيث q عدد طبيعي . ومنه $r = a - bq$.

d يقسم b وبالتالي d يقسم bq و d يقسم a إذن d يقسم $a - bq$ أي d يقسم r .

ومنه d قاسم مشترك للعددين b و r .

d' يقسم b وبالتالي d' يقسم bq و d' يقسم r إذن d' يقسم $bq + r$ أي d' يقسم a .

ومنه d' قاسم مشترك للعددين a و b .

إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و r .

وبالتالي $d = d'$ أي $PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$.

خوارزمية إقليدس

a و b عدنان طبيعيان غير معدومين و حيث $a > b$. بقسمة a على b نحصل على $a = bq_1 + r_1$ و $0 \leq r_1 < b$ حيث q_1 و r_1 عدنان طبيعيان .

• إذا كان $r_1 = 0$ (أي b يقسم a) فإن $PGCD(a; b) = b$.

• إذا كان $r_1 \neq 0$ فإن $PGCD(a; b) = PGCD(b; r_1)$. نقسم b على r_1 نحصل على $b = r_1q_2 + r_2$ و $0 \leq r_2 < r_1$ حيث q_2 و r_2 عدنان طبيعيان .

• إذا كان $r_2 = 0$ (أي r_1 يقسم b) فإن $PGCD(a; b) = PGCD(b; r_1) = r_1$.

• إذا كان $r_2 \neq 0$ فإن $PGCD(a; b) = PGCD(b; r_1) = PGCD(r_1, r_2)$. نقسم r_1 على r_2 نحصل على $r_1 = r_2q_3 + r_3$ و $0 \leq r_3 < r_2$ حيث q_3 و r_3 عدنان طبيعيان .

• نواصل هكذا حتى نجد باقيا معدوما . ونسمي r_n آخر باقي غير معدوم وعليه:

$$PGCD(a; b) = PGCD(b; r_1) = PGCD(r_1; r_2) = \dots = PGCD(r_n; 0) = r_n$$

هذه الطريقة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين تسمى خوارزمية إقليدس .

خاصية 2: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمة خوارزمية إقليدس .

مثال: نعين $PGCD(1631, 932)$.

$$1631 = 932 \times 1 + 699$$

$$932 = 699 \times 1 + 233 \quad \text{و منه: } PGCD(1631; 932) = 233$$

$$699 = 233 \times 3 + 0$$

تمرين محلول 1: عين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b في كل حالة من الحالات الآتية :

1. $a = 8700$ و $b = 9150$.

2. $a = 691$ و $b = 2007$.

3. $a = 1500$ و $b = 250$.

طريقة: لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين يمكن استعمال خوارزمية إقليدس و وضع النتائج في جدول

الحل:

1.

الحاصل		1	19	3
المقسوم و القاسم	9150	8700	450	150
الباقى		450	150	0

إذن : $PGCD(8700; 9150) = 150$.

2.

الحاصل		2	1	9	2	7	1	3
المقسوم و القاسم	2007	691	625	66	31	4	3	1
الباقى		625	66	31	4	3	1	0

إذن : $PGCD(691; 2007) = 1$.

3.

الحاصل		6
المقسوم و القاسم	1500	250
الباقى		0

إذن : $PGCD(1500; 250) = 250$.

تمرين محلول 2: أوجد ثنائية $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة حيث أن : $150x + 108y = 6$.

طريقة: لإيجاد الثنائية $(x; y)$ نستعمل خوارزمية إقليدس .

الحل

الحاصل		1	2	1	1	3
المقسوم و القاسم	150	108	42	24	18	6
الباقى		42	24	18	6	0

إذن : $PGCD(150; 108) = 6$.

$24 - 18 = 6$ و منه $24 - (42 - 24) = 6$ أي $24 \times 2 - 42 = 6$ و منه $(108 - 42 \times 2) \times 2 - 42 = 6$

أي $108 \times 2 - 42 \times 5 = 6$ و منه $108 \times 2 - (150 - 108) \times 5 = 6$ أي $108 \times 7 - 150 \times 5 = 6$.

إذن $150 \times (-5) + 108 \times 7 = 6$.

خاصية 3: a و b عدنان طبيعيان غير معدومين . k عدد طبيعي غير معدوم.

$$PGCD(ka; kb) = k \times PGCD(a; b)$$

البرهان: نضع $PGCD(a; b) = d$ و $PGCD(ka; kb) = d'$. d و d' عدنان طبيعيان غير معدومين.

d يقسم a و منه kd يقسم ka . d يقسم b و منه kd يقسم kb و بالتالي kd قاسم مشترك للعددين ka و kb إذن kd يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين ka و kb أي kd يقسم d' ومنه يمكن كتابة $d' = k'(kd)$ حيث k' عدد طبيعي .

كذلك d' يقسم ka و kb . و منه $k'd$ يقسم ka و kb و بالتالي $k'd$ يقسم a و b وبالتالي $k'd$ يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و بالتالي $k' = 1$. ومنه $d' = kd$.
إذن $PGCD(ka; kb) = k \times PGCD(a; b)$.

تعريف: a و b عدنان طبيعيان غير معدومين.

يكون العدنان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 .

خاصية 4: a و b عدنان طبيعيان غير معدومين . d قاسم مشترك للعددين a و b . نضع $a = da'$ و $b = db'$.

يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا و فقط إذا كان العدنان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما .

البرهان: a' و b' عدنان طبيعيان غير معدومين و d قاسمهما المشترك الأكبر .

• نضع $a = da'$ و $b = db'$.

$$d = PGCD(a; b) = PGCD(da'; db') \\ \text{و منه} \\ = d \times PGCD(a'; b')$$

بما أن d غير معدوم فإن : $PGCD(a'; b') = 1$

• المسألة العكسية . نعتبر $PGCD(a'; b') = 1$.

$$PGCD(a; b) = d \times PGCD(a'; b') = d$$

3. تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين

تعريف: a و b عدنان صحيحان غير معدومين.

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث $d = PGCD(|a|; |b|)$.

خاصية: a و b عدنان صحيحان غير معدومين . k عدد صحيح غير معدوم.

$$PGCD(ka; kb) = |k| PGCD(a; b)$$

ملاحظة: a و b عدنان صحيحان غير معدومين.

إذا كان b يقسم a فإن $PGCD(a; b) = |b|$

تمرين محلول 1: عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :

$$\begin{cases} a + b = 66 \\ PGCD(a; b) = 6 \end{cases}$$

الحل:

نضع $a = 6a'$ و $b = 6b'$ حيث a' و b' عدنان أوليان فيما بينهما .

$a + b = 66$ تعني $6a' + 6b' = 66$ و منه $a' + b' = 11$

$$(a'; b') \in \{(1; 10), (2; 9), (3; 8), (4; 7), (5; 6), (6; 5), (7; 4), (8; 3), (9; 2), (10; 1)\}$$

و منه مجموعة الحلول هي :

$$\{(6; 60), (12; 54), (18; 48), (24; 42), (30; 36), (36; 30), (42; 24), (48; 18), (54; 12), (60; 6)\}$$

تمرين محلول 2: عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :

$$\begin{cases} a \times b = 900 \\ PGCD(a; b) = 5 \end{cases}$$

الحل:

نضع $a = 5a'$ و $b = 5b'$ حيث a' و b' عدنان أوليان فيما بينهما .

$a \times b = 900$ تعني $5a' \times 5b' = 900$ و منه $a' \times b' = 36$

$$(a'; b') \in \{(1; 36), (4; 9), (9; 4), (36; 1)\}$$

و منه مجموعة الحلول هي : $\{(5; 180), (20; 45), (180; 5), (45; 20)\}$

تمرين محلول 3: عين القاسم المشترك الأكبر للعددين -1440 و -448

طريقة: لإيجاد $PGCD(-1440; -448)$ نبحث عن $PGCD(1440; 448)$.

الحل

$$PGCD(-1440; -448) = PGCD(1440; 448)$$

يمكن الملاحظة أن $1440 = 32 \times 45$ و $448 = 32 \times 14$

$$PGCD(1440; 448) = 32 \times PGCD(45; 14)$$

لنحسب $PGCD(45; 14)$

2	1	4	3		الحاصل
1	2	3	14	45	المقسوم و القاسم
0	1	2	3		الباقى

إذن : $PGCD(45; 14) = 1$

$$PGCD(1440; 448) = 32 \times PGCD(45; 14) = 32$$

و منه $PGCD(-1440; -448) = 32$

اهتم فيثاغورث بالمثلثات القائمة التي أطوال أضلاعها أعداد طبيعية ، و من هنا الثلاثيات الفيثاغورية هي الثلاثيات $(x; y; z)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حلول المعادلة $x^2 + y^2 = z^2$.

1. نعتبر المثلثات القائمة التي وترها يفوق الضلع الذي طوله y بـ 1.

• أثبت أن $x^2 = 2y + 1$.

• أثبت أن $x = 2n + 1$ حيث n عدد طبيعي.

• استنتج عائلة من الثلاثيات الفيثاغورية.

• استنتج الثلاثيات من هذه العائلة حيث $z \leq 50$.

2. نريد الآن تعيين الثلاثيات الفيثاغورية كلها بدون وضع أي شرط . نضع d القاسم المشترك الأكبر للأعداد

x, y, z ونضع $x = da$ ، $y = db$ و $z = dc$. حيث a, b, c أعداد طبيعية .

• أثبت أن $x^2 + y^2 = z^2$ تعني $a^2 + b^2 = c^2$.

• أثب أنه إذا كان أحد العددين a أو b زوجيا يكون الآخر فرديا.

• نفرض $a = 2k$ حيث k عدد طبيعي. أثبت أن $k^2 = \left(\frac{c-b}{2}\right)\left(\frac{c+b}{2}\right)$.

• نضع $a = \frac{c+b}{2}$ و $b = \frac{c-b}{2}$. أثبت أن a و b عدنان طبيعيين أوليان فيما بينهما.

• استنتج وجود عددين طبيعيين u و v حيث $u^2 = a$ و $v^2 = b$.

• أكتب a, b, c بدلالة u و v . ثم x, y, z بدلالة u, v, d .

• عكسيا أثبت أنه إذا وجدت أعداد طبيعية غير معدومة u, v, d ($u > v$) حيث $x = 2duv$ ،

$y = d(u^2 - v^2)$ و $z = d(u^2 + v^2)$ فإن $(x; y; z)$ ثلاثية فيثاغورية .

• أعط الشكل العام الثلاثيات الفيثاغورية.

تطبيق: اكتشف علماء الآثار في مصر بقرب من القاهرة عدد N من الركوم (جمع ركام) من الأحجار . كل ركام

يحتوي على 348960150 حجرة مكعبة الشكل . و كانت هذه الأحجار تستعمل في بناء نصب شكله متوازي

المستطيلات قائم ، ارتفاعه يساوي قطر قاعدته . نشير إلى أن العدد N أولي .

ما هي أطوال هذا النصب ؟

لمحة تاريخية:

فيثاغورث -المولود في إيطاليا (580-500 ق.م) و اشتغل بالصاب والهندسة

و هو القائل بان " هذا العالم كرة ناريه حيه "



مسألة : n عدد طبيعي .

لتكن الأعداد $a = 3n^2 + 12n + 20$ ، $b = n + 2$ و $c = 3n + 5$.

نريد تعيين باقي قسمة a على b و باقي قسمة a على c .

1. وضع تخمين بواسطة جدول .

- أنجز ورقة المجدول الموالية باتباع الخطوات التالية:
- في الخلية B2 أجز $3 \cdot A2^2 + 12 \cdot A2 + 20$ ، في الخلية C2 أجز $-A2 + 2$ ، في الخلية D2 أجز $-MOD(B2;E2)$ ، في الخلية E2 أجز $-3 \cdot A2 + 5$ ، في الخلية F2 أجز $-MOD(B2;E2)$
- حدد الخلايا B2 : F2 ثم أنقل إلى تحت .

• ضع تخميناً حول باقي قسمة a على b و باقي قسمة a على c .

	A	B	C	D	E	F
1	n	a	b	باقي قسمة a على b	c	باقي قسمة a على c
2	0					
3	1					
4	2					
5	3					
6	4					
7	5					
8	6					
9	7					
10	8					
11	9					
12	10					
13	11					
14	12					
15	13					
16	14					
17	15					
18	16					
19	17					
20	18					
21	19					
22	20					
23						
24						
25						
26						

2. البرهان .

- أثبت أن b يقسم $3n^2 + 12n + 12$.
- استنتج أن b يقسم a إذا و فقط إذا كان b يقسم 8 .
- ما هو باقي قسمة a على b في كل حالة من الحالات الأخرى ؟
- تأكد أن $a = (3n + 5)(n + 2) + n + 10$. ما هو باقي قسمة a على c ؟

$$PGCD(a; b) = PGCD(bc - a; b)$$

3. بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، تكون المساواة التالية صحيحة :

$$PGCD(3n^3 - 11n; n + 3) = PGCD(48; n + 3)$$

4. أ) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد الطبيعي 48 .
ب) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من

$$A = \frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$$

التمرين :
1. أ) أنشر العبارة $(n + 3)(3n^2 - 9n + 16)$ مع $n \in \mathbb{N}$
استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3 - 11n + 48$ قابلا للقسمة على $n + 3$.
ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2 - 9n + 16$ ، هو عدد طبيعي غير معدوم .
2. بين أنه ، من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a ، b و c ، تكون المساواة التالية صحيحة :

حل مختصر

1. أ) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$(n + 3)(3n^2 - 9n + 16) = 3n^3 - 9n^2 + 16n + 9n^2 - 27n + 48$$

$$(n + 3)(3n^2 - 9n + 16) = 3n^3 - 11n + 48$$

بما أن $3n^2 - 9n + 16$ هو مجموع أعداد صحيحة فإنه يكون عددا صحيحا وبالتالي $3n^3 - 11n + 48$ يقبل القسمة على $n + 3$.

ب) مميز كثير الحدود $3x^2 - 9x + 16$ هو $\Delta = -111$ ومعامل x^2 هو 3 (موجب) إذن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $3x^2 - 9x + 16 > 0$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد صحيح موجب تماما أي هو عدد طبيعي غير معدوم .

2. نفرض d قاسما للعددين a و b إذن d يقسم bc وبالتالي هو يقسم $bc - a$ ومنه d قاسم مشترك للعددين b و $bc - a$.

عكسيا ، نفرض d قاسما للعددين b و $bc - a$ إذن هو قاسم bc و $bc - a$ ومنه d يقسم الفرق $bc - (bc - a)$ أي d يقسم a وبالتالي d قاسم مشترك للعددين a و b .

خلاصة مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و $bc - a$ وبالأخص

$$p \gcd(a; b) = p \gcd(bc - a; b)$$

3. نستعمل النتيجة السابقة بوضع : $a = 48$ ، $b = n + 3$ و $c = 3n^2 - 9n + 16$ إذن $bc - a = 3n^3 - 11n$ ومنه

$$p \gcd(48; n + 3) = p \gcd(3n^3 - 11n; n + 3)$$

4. أ) $48 = 2^4 \times 3$ ، مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 هي :

$$\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$$

ب) $A = \frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ لدينا $n + 3 > 0$ لكي يكون $A \in \mathbb{N}$ يجب أن يكون $3n^3 - 11n \geq 0$ و $n + 3$ يقسم $3n^3 - 11n$.

$$3n^3 - 11n \geq 0 \quad \text{معناه} \quad 3n \left(n^2 - \frac{11}{3} \right) \geq 0$$

ويكافئ $n = 0$ أو $n \geq \sqrt{\frac{11}{3}}$ أي $n = 0$ أو $n \geq 2$.

$n + 3$ يقسم $3n^3 - 11n$ معناه $p \gcd(3n^3 - 11n; n + 3) = n + 3$ ومن 3.

ينتج $p \gcd(48; n + 3) = n + 3$ ويكافئ أن $n + 3$ يقسم 48 ومعناه

$$n + 3 \in \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$$

باعتبار $n = 0$ أو $n \geq 2$ نجد $n \in \{0; 3; 5; 9; 13; 21; 45\}$

تعاليف

للبرهان على قابلية القسمة يجب أن يكون الحاصل $3n^2 - 9n + 16$ عددا صحيحا .

يمكن استعمال الكتابة

$$3n^2 - 9n + 16 = 3n(n - 3) + 16$$

ونبين الحالات الأربعة $n = 0$ ،

$$n = 1$$

$$n = 2$$

$$n \geq 3$$

لكي يكون لمجموعتين نفس العناصر يجب البرهان المباشر وكذلك البرهان العكسي .

إذا كانت مجموعتان متساويتين فإن لهما نفس العنصر الأكبر .

يمكن وضع

$$A = \frac{3n^3 - 11n + 48 - 48}{n + 3}$$

$$A = 3n^2 - 9n + 16 + \frac{-48}{n + 3}$$

ولكن النتيجة تعطي $A \in \mathbb{Z}$

تذكر بالخاصية * b يقسم a إذا وفقط

$$p \gcd(a; b) = b$$

تنبيه

في اختبار مادة الرياضيات يجب مراعاة الوقت الذي تضعه لكل تمرين حيث يكون متناسبا مع النقطة الموضوعة له . وفي التمرين المتعلق بالحساب ، يكون أحيانا سؤال جديد الطرح ولكن تسبقه سلسلة من الأسئلة متدرجة حتى الوصول إلى الهدف ولهذا لا ينبغي التخوف والتسرع .

التمرين

1. x عدد طبيعي . برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معصوم k ،

$$(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})=x^k-1$$
2. أ- d و n عدنان طبيعيان غير معصومين حيث d يقسم n .
 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معصوم a ، العدد a^d-1 يقسم العدد a^n-1 .
 ب- استنتج أن العدد $2^{2010}-1$ يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9 .
3. أ- عين $PGCD(63;60)$.
 ب- بين أن : $(a^{63}-1)-(a^{60}-1)a^3=a^3-1$.
 ج- برهن أن : $PGCD(a^{63}-1;a^{60}-1)=a^3-1$.
 د- استنتج القيمة لـ : $PGCD(2^{63}-1;2^{60}-1)$.

توجيهات

1. للحصول على النتيجة يكفي نشر العبارة الموجودة على يسار المساواة .
2. أ- ضع $x=a^d$ و $n=kd$ واستنتج من 1 .
 ب- لاحظ أن $2010=3 \times 670=6 \times 335$ وتطبق النتيجة السابقة من أجل $a=2^3$ ثم $a=2^6$ وأخيرا استعمل خاصية التعدي في القسمة .
3. أ- استعمل خوارزمية أقليدس أو لاحظ $63=3 \times 21$ و $60=3 \times 20$ مع عددين متوالين أوليين فيما بينهما .
 ب- أنشر العبارة .
 ج- بين باستعمال المساواة السابقة أن $PGCD(a^{63}-1;a^{60}-1)$ يقسم a^3-1 ثم العكس .
 د- الاستنتاج مباشر بوضع $a=2$.

1- قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1 عین مجموعة القواسم لكل من الأعداد الصحيحة التالية : 20 ، 24 و 75 .

2 عین كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية حيث يكون $ab = 39$.

3 عین كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الصحيحة التي تحقق $x^2 - y^2 = 15$.

4 أ - أنشر العبارة $(x-2)(y-3)$.

ب - عین كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الصحيحة التي تحقق : $xy = 3x + 2y$.

5 حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية : $x^2 = 4y^2 + 3$.

6 حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية : $5xy - y^2 = 49$.

7 ما هو عدد المضاعفات للعدد 53 المحصورة بين 1027 و 1112 .

8 (1) عین الأعداد الطبيعية غير المدومة a بحيث يكون قاسما للعدد a و $a < 50$.

(2) ما هي الكسور المساوية لـ $\frac{33}{21}$ ، مقام لكل منها يكون عددا طبيعيا أصغر تماما من 50 .

9 عین كل الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها 13 قاسما للعدد $n+4$ و $|n| \leq 22$.

10 عین كل الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $5n+7$ قاسما لـ 12 .

11 عین الأعداد الطبيعية غير المدومة n التي من أجلها يكون العدد $n+6$ يقبل القسم على n .

12 (1) عین الأعداد الصحيحة n حيث يكون $5n+6$ يقسم 34 .

(2) عین الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $5n+6$ قاسما للعدد $n+8$.

13 n عدد صحيح . نضع $a = 3n+7$ و $b = n+1$ أثبت أنه إذا كان العدد d قاسما لـ a و b فإن d يكون قاسما للعدد 4 .

14 n عدد صحيح .

نضع $a = 3n+7$ و $b = 7n+2$ أثبت أنه إذا كان العدد d قاسما لـ a و b فإن d يكون قاسما للعدد 43 .

15 n عدد طبيعي غير مدوما ويختلف عن العدد 1 . عین بدلالة n بعض القواسم للعدد $n^3 - n$.

16 ليكن a و b عددين صحيحين .

برهن أنه إذا كان 2 يقسم $a^2 + b^2$ فإن 2 يقسم $(a+b)^2$.

17 ليكن a و b عددين صحيحين غير مدومين .

(أ) أنشر العبارة $(a+b)^3$

(ب) برهن أنه إذا كان 3 يقسم $a^3 + b^3$ فإن 3 يقسم $(a+b)^3$.

2- القسمة الأقليدية

18 عین باقي القسمة الأقليدية للعدد a على b في كل حالة من الحالات التالية :

أ - $a = 118$ و $b = 5$.

ب - $a = 152$ و $b = 7$.

ج - $a = -118$ و $b = 5$.

د - $a = -152$ و $b = 7$.

19 عین الأعداد الطبيعية n الأصغر من 100 والذي يكون باقي قسمتها على 41 هو 5 .

20 a و b عدنان طبيعيان غير معدومين حيث حاصل القسمة الأقليدية للعدد a على b هو 17 وبقاياها هو 3 ، و $a - 27 = 23b$. عيّن a و b .

21 n عدد طبيعي ، بقسمته على 7 أو على 3 نجد نفس الباقي .

عيّن القيم الممكنة للعدد الطبيعي n .

22 عيّن كل الأعداد الطبيعية الذي يكون من أجلها الباقي والحاصل لقسمتها على 7 ، متساويين

23 عيّن كل الأعداد الطبيعية الذي يكون من أجلها الحاصل هو ضعف الباقي عند قسمتها على 13 .

24 a و b عدنان طبيعيان غير معدومين حيث : $a + b = 416$ وباقي القسمة الأقليدية لـ a على b هو 61 . عيّن a و b .

25 باستعمال خوارزمية أقليدس عيّن $PGCD(a, b)$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ - $a = 315$ و $b = 117$.

ب - $a = 1260$ و $b = 528$.

ج - $a = 1380$ و $b = 972$.

26 n عدد طبيعي غير معدوم .

ما هو القاسم المشترك الأكبر للعددين n و $3n$ ؟

ما هو القاسم المشترك الأكبر للعددين n و n^2 ؟

27 برهن أن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة قواسم العدد $\gcd(a, b)$.

28 a و b عدنان طبيعيان غير معدومين

علّمنا أن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفس مجموعة القواسم لـ $PGCD(a, b)$.

عيّن كل القواسم المشتركة للعددين 456 و 792 .

29 — عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 448 و 308 .

— استنتج كل القواسم المشتركة للعددين 448 و 308 .

30 n عدد طبيعي حيث الباقيين للقسمة الأقليدية لكل من العددين 4294 و 3521 على n هما على الترتيب 10 و 11 . عيّن كل القيم الممكنة للعدد n .

31 n عدد طبيعي مكون من أربعة أرقام .

عيّن العدد n حيث 37 و 53 هما على الترتيب ، الباقيان للقسمة الأقليدية للعددين 21685 و 33509 على n .

32 (1) عيّن $PGCD(182, 126)$

(2) باستعمال خوارزمية أقليدس ، جد عددين

صحيحين α و β ، يحققان : $182\alpha + 126\beta = 14$

3 - خواص القاسم المشترك الأكبر

33 أحسب باقي قسمة العدد 1399 على 82 ثم استنتج $PGCD(1399, 82)$.

34 عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b في كل حالة من الحالات التالية :

أ - $a = -350$ و $b = -252$.

ب - $a = 126$ و $b = -735$.

ج - $a = -138$ و $b = 575$.

35 عيّن $PGCD(54, 82)$ ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين $PGCD(5400, 8200)$.

من التمرين 36 إلى التمرين 41 ، عيّن كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين المقترحين

36 $\begin{cases} a + b = 54 \\ PGCD(a, b) = 9 \end{cases}$

37 $\begin{cases} a + b = 72 \\ PGCD(a, b) = 9 \end{cases}$

38 $\begin{cases} a + b = 420 \\ PGCD(a, b) = 84 \end{cases}$

يراد إحاطتها بسياج قائم بأوتاد (أعمدة) حديدية مغروسة في الأرض بنفس المسافة مثلى ، مثلى ؛ وفي كل زاوية القطعة يغرس وتد.

علما أن المسافة بين كل وتدين متتاليتين ، هي عدد طبيعي مقدر بالمتر ، أقل من $5m$ وأكبر من $2m$.

— أحسب عدد الأوتاد التي يمكن غرسها على محيط القطعة الأرضية .

46 نسمي قاسما تاما لعدد طبيعي ، كل قاسما له موجبا ويختلف عنه .

القول عن العددين الطبيعيين a و b أنهما وديان إذا كان a هو مجموع القواسم التامة للعدد b و b هو مجموع القواسم التامة للعدد a .

برهن أن العددين 220 و 284 وديان .

47 ليكن n عددا طبيعيا أكبر من أو يساوي 3 .

برهن أن : $n+5$ مضاعف لـ $n-2$ إذا وفقط إذا كان $n=3$ أو $n=9$.

48 (1) أحسب مجموع قواسم العدد 8 ثم مجموع قواسم 81 .

(2) ما هو عدد قواسم العدد 8×81 ؟

49 (1) كيف يمكن اختيار العدد الطبيعي n حتى يكون $\frac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا .

(2) عين الأعداد الطبيعية a حيث من بين قواسم العدد a قاسمين أوليين فقط هما 2 و 3 ، وعند قواسم a^2 هو ثلاث مرات عدد قواسم العدد a .

50 عين كل الثنائيات $(x:y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق $xy - 4y - 12 = 0$.

51 في المستوي المنسوب إلى معلم ، نعتبر C_r منحنى

الدالة f المعرفة على المجموعة $D = [-3; 1[\cup]1; 3]$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 1} ; \quad \forall x \in D$$

$$\begin{cases} ab = 360 \\ PGCD(a, b) = 6 \end{cases} \quad \text{39}$$

$$\begin{cases} ab = 2700 \\ PGCD(a, b) = 5 \end{cases} \quad \text{40}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a, b) = 5 \end{cases} \quad \text{41}$$

42 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ،

عين $PGCD(a, b)$.

ما يمكن قوله عن العددين a و b ؟

أ - $a = 55$ و $b = 36$.

ب - $a = 14$ و $b = 165$.

ج - $a = 1155$ و $b = 872$.

43 (1) عين $PGCD(140, 143)$

(2) استنتج $PGCD(a, b)$ في كل حالة من الحالتين التاليتين :

$$\begin{cases} a = 140 \times 34 \\ b = 143 \times 34 \end{cases} \quad \text{أ -}$$

$$\begin{cases} a = 143 \times 82 \\ b = 140 \times 82 \end{cases} \quad \text{ب -}$$

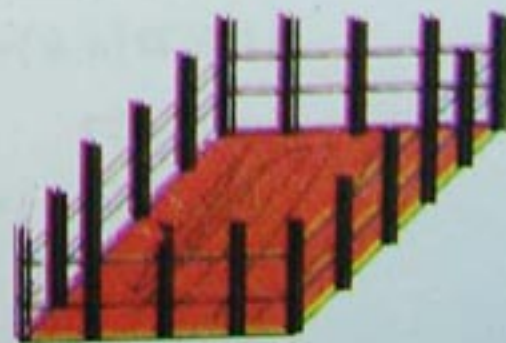
44 لماذا لا يوجد عدداً طبيعياً مجموعهما 500

وقاسمهما المشترك الأكبر هو 7 ؟

تمارين للتعمق

1. قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

45 بعدا قطعة أرضية مستطيلة الشكل هما $156m$ و $90m$.



(1) عين العدد الحقيقي a حتى يكون من أجل كل

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{a}{x-1}, x \in D$$

(2) عين نقط المنحني C_f التي إحداثياتها أعداد صحيحة .

52 n عدد طبيعي . نضع $a = n(n^2 + 5)$.

(1) برهن أن a عدد زوجي .

(2) برهن أن a مضاعف للعدد 3 .

53 a عدد طبيعي .

برهن أن العدد $a(a^2 - 1)$ مضاعف للعدد 6 .

54 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، رقم آحاد

العدد $n^5 - n$ هو 0 .

استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p العددين n^{p+5} و n^{p+1} لهما نفس رقم الآحاد .

55 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $n^7 - n$

يقبل القسمة على 14 .

56 (1) من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$$b = n^2 + 3n + 2 \text{ و } a = n^2 + 5n + 4$$

بين أن العدد $n+1$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .

(2) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها

العدد $n+1$ قاسما للعدد $3n^2 + 15n + 20$.

57 a و n عددان صحيحان حيث a يقسم $n-1$

و $n^2 + n + 3$.

أ- بين أن a يقسم $n^2 - 2n + 1$.

ب- استنتج أن a يقسم $3n + 2$.

ج- بين إذن أن a يقسم 5 .

د- ما هي القيم الصحيحة الممكنة للعدد a ؟

58 عين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(x; y)$ التي

يكون من أجلها العدد xy قاسما للعدد $x+y$.

59 n عدد طبيعي فردي . S مجموع أعداد طبيعية

متتالية وعددها n . بين أن العدد S يقبل القسمة على n .

من التمرين 60 إلى 65 استعمل البرهان بالتراجع .

60 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $n^3 + 11n$

يقبل القسمة على 6 .

61 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $7^{2n} + 3$

يقبل القسمة على 4 .

62 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$2 - 3^{6n-4}$ يقبل القسمة على 7 .

63 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n} - 2^n$

يقبل القسمة على 7 .

64 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^n - 1 - 3n$

يقبل القسمة على 9 .

65 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $7 \times 3^{5n} + 4$

يقبل القسمة على 11 .

2 - القسمة الأقليدية

66 ما هو باقي القسمة الأقليدية للعدد 71 على 72 ؟

67 كتاب مكتوب عليه 4350 سطرا .

كل صفحة تحمل 34 سطرا ما عدا الصفحة الأخيرة

ناقصة .

ما هو عدد الأسطر الموجودة على الصفحة الأخيرة ؟

68 علما أنه يوجد عدد طبيعي k حيث

$$100^{100} = 13k + 35$$

عين باقي قسمة 100^{100} على 13 .

69 الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين m و n

على 17 هما على التوالي 8 و 12 .

عين بواقي القسمة الأقليدية لكل من الأعداد $m+n$ ،

$m \times n$ و m^2 على 17 .

70 عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة n الذي يكون

باقي قسمتها على 43 مساويا لمربع الحاصل .

71 أ - حول 241312s (ثانية) إلى أيام ، ساعات ،

دقائق وثوان .

ج) استنتج عدد من الشكل $4k - 1$ بحيث لا يكون مجموع لمربعين .

78 من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$$u_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$$

أ- برر أن u_n عدد طبيعي .

ب- أحسب u_n بدلالة n .

ج- استنتج باقي قسمة العدد 5^{n+1} على 4 ، من أجل n عدد طبيعي .

79 برهن بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$2^{3n} - 1 \text{ يقبل القسمة على } 7 .$$

استنتج باقي القسمة الأقليدية للعدد a على 7 في كل حالة من الحالات التالية .

$$\text{أ- } a = 2^{3n} \quad \text{ب- } a = 2^{3n+1} \quad \text{ج- } a = 2^{3n+2}$$

80 ليكن a و b عددين طبيعيين غير معدومين .

(1) برهن أن القواسم المشتركة للعددين a و $(a^2 + b)$ هي نفس القواسم المشتركة للعددين a و b .

ما القول عن $PGCD(a; b)$ و $PGCD(a; a^2 + b)$

(2) برهن أن: $PGCD(a+b; 2a+3b) = PGCD(a; b)$

81 n عدد طبيعي .

$$\text{نضع : } a = 11n + 3 \text{ و } b = 13n - 1$$

$$(1) \text{ بين أن } 13a - 11b = 50$$

(2) عين كل القيم الممكنة $PGCD(a; b)$.

(3) عين ثنائية $(a; b)$ بحيث يكون $PGCD(a; b) = 50$.

82 عين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(a; b)$ التي

$$\begin{cases} 2a^2 + b^2 = 20992 \\ PGCD(a; b) = 16 \end{cases}$$

83 a و b عدنان طبيعيين غير معدومين .

$$\text{نضع : } PGCD(a; b) = d$$

ب- أعط خوارزمية لتحويل عدد n من الثنائية إلى أيام ، ساعات ، دقائق وثواني .

72 حاصل قسمة العدد 1517 على العدد الطبيعي b هو 75 . عين b وباقي هذه القسمة .

73 ليكن a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة .

بين أنه ، إذا كان q حاصل القسمة الأقليدية للعدد a على b ، و q' هو حاصل قسمة q على c ، فإن q' هو كذلك حاصل قسمة a على الجداء bc .

74 a عدد صحيح .

حاصل القسم الأقليدية للعدد $a-1$ على العدد الطبيعي غير المعلوم b هو q .

ما هو حاصل القسم الأقليدية للعدد $ab^n - 1$ على b^{n+1} ؟

75 أ) أنجز القسمة الأقليدية للعدد 76 على 17 .

ب) ليكن n عدد طبيعي ؛ ما هما حاصل وباقي لقسمة العدد $76+n$ على 17 ؟

ج) الحالة العامة : القسم الأقليدية لعدد a على b تعطي الحاصل q والباقي r .

عين الحاصل والباقي للقسمة الأقليدية للعدد $a+n$ على b .

76 a و b عدنان طبيعيين و r باقي القسمة الأقليدية للعدد a على b .

أ) عين شرطاً لازماً وكافياً على a و b حيث يكون حاصل قسمة a على b مساوياً للعدد r .

من أجل $a = 24$ ، ما هي الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرط السابق ؟

77 أ) بين أنه ، إذا كان a و b عدنان طبيعيين غير معدومين حيث $a^2 + b^2$ عدد فردي فإن a و b مختلفين في الشفعية (أحدهما زوجي والآخر فردي) .

ب) بين أنه ، إذا كان عدداً فردياً n هو مجموع مربعين فإنه يكتب على الشكل $n = 4k + 1$ مع $k \in \mathbb{N}$.

عين كل الثنائيات $(a; b)$ التي تحقق

$$ab + 5d^2 = 35d$$

84 a و b عدنان طبيعيان غير معدومين .

$$y = 4a - 3b \text{ و } x = 7a - 5b$$

$$PGCD(|x|; |y|) = PGCD(a; b)$$

(2) عين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(\alpha; \beta)$ حيث

$$\begin{cases} (7\alpha - 5\beta)(4\alpha - 3\beta) = 1300 \\ PGCD(\alpha; \beta) = 5 \end{cases}$$

من التمرين 85 إلى التمرين 88، برهن من أجل كل عدد طبيعي n ، أن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

$$85 \quad b = 2n + 7 \text{ و } a = n + 3$$

$$86 \quad b = 8n + 11 \text{ و } a = 3n + 4$$

$$87 \quad b = 5n + 4 \text{ و } a = 9n + 7$$

$$88 \quad b = 4n^2 + 1 \text{ و } a = 7n^2 + 2$$

$$89 \quad n \text{ عدد طبيعي غير معدوم .}$$

$$(1) \text{ عين القيم الممكنة للعدد } PGCD(2n - 1; 9n + 4)$$

$$(2) \text{ برهن أنه إذا كان } PGCD(2n - 1; 9n + 4) = 17$$

$$\text{فإن } 17 \text{ يقسم } n + 8 .$$

$$(3) \text{ استنتج قيم العدد الطبيعي } n \text{ التي يكون من أجلها}$$

$$PGCD(2n - 1; 9n + 4) = 17$$

$$90 \quad n \text{ عدد طبيعي .}$$

$$\text{نضع : } a = 5n^2 + 14n + 14 , b = n + 2$$

$$\text{و } c = 5n + 3$$

$$(1) \text{ برهن أن } b \text{ قاسم للعدد } 5n^2 + 14n + 8$$

$$(2) \text{ استنتج أن } b \text{ يقسم } a \text{ معناه } b \text{ يقسم } 6$$

$$(3) \text{ عين حسب قيم العدد } n , \text{ باقي قسمة العدد } a \text{ على}$$

$$b ; \text{ ثم باقي قسمة العدد } a \text{ على } c$$

$$91 \quad (1) \text{ عدد صحيح يختلف عن } 1$$

$$\text{نضع : } a = 3n + 5 \text{ و } b = n - 1$$

$$a = 3b + 8 \text{ أن تحقق}$$

$$b - \text{ جد قيم العدد الصحيح } n \text{ التي يكون من أجلها } \frac{a}{b}$$

$$\text{عددا صحيحا .}$$

$$(2) \text{ نفرض أن } n \text{ عدد طبيعي .}$$

$$a - \text{ برهن أن } PGCD(a; b) \text{ هو قاسم للعدد } 8$$

$$b - \text{ ناقش حسب قيم } n \text{ القيم الممكنة لـ } PGCD(a; b)$$

$$92 \quad n \text{ عدد طبيعي .}$$

$$(1) \text{ نضع : } \alpha = n^2 + n \text{ و } \beta = n + 2$$

$$a - \text{ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي } n ,$$

$$PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(n; \beta)$$

$$b - \text{ استنتج القيم الممكنة للعدد } PGCD(\alpha; \beta)$$

$$(2) \text{ نعتبر العددين } a \text{ و } b \text{ حيث :}$$

$$a = 3n^3 + 5n^2 + 2n \text{ و } b = 3n^2 + 8n + 4$$

$$a - \text{ برهن أن العدد } (3n + 2) \text{ هو قاسم مشترك للعددين}$$

$$a \text{ و } b$$

$$b - \text{ استنتج ، حسب قيم } n , \text{ أن } PGCD(a; b)$$

$$\text{هو } (3n + 2) \text{ أو } 2(3n + 2)$$

$$ج - \text{ عين } \alpha \text{ و } \beta \text{ علما أن } PGCD(a; b) = 41$$

$$93 \quad n \text{ عدد طبيعي .}$$

$$\text{نضع : } a = 9n + 1 \text{ و } b = 9n - 1$$

$$(1) \text{ جد علاقة بين } a \text{ و } b \text{ مستقلة عن العدد } n$$

$$\text{عين } PGCD(a; b) \text{ في حالة } n \text{ عدد زوجي ثم في}$$

$$\text{حالة } n \text{ عدد فردي .}$$

$$(3) \text{ استنتج باقي قسمة العدد } 81n^2 \text{ على } 4 \text{ في حالة } n$$

$$\text{عدد فردي .}$$

$$94 \quad n \text{ عدد طبيعي .}$$

$$\text{نضع : } a = 7n^2 + 4 \text{ و } b = n^2 + 1$$

(1) برهن أن كل قاسم مشترك للعددين a و b هو قاسم لـ 3 .

(2) أ) اشرح لماذا يكون $n^2 = 3k + 1$ في حالة $p \gcd(a, b) = 3$ ؟

ب) بين ، باستعمال فصل الحالات أن هذا غير ممكن .

(3) استنتج $p \gcd(a, b)$.

95 بكالوريا

نعتبر عددين طبيعيين غير معدومين x و y وأوليين فيما بينهما . نضع $S = x + y$ و $P = xy$.

(1) أ- برهن أن x و S أوليان فيما بينهما . وكذلك y و S أوليان فيما بينهما .

ب- باستعمال البرهان بالخلف ، برهن أن S و P أوليان فيما بينهما .

ج- برهن أن العددين S و P من شفتين مختلفتين (أحدهما فردي والآخر زوجي) .

(2) عين القواسم الموجبة للعدد 84 .

(3) عين الأعداد الأولية فيما بينها x و y حيث $SP = 84$.

(4) عين عددين طبيعيين a و b يحققان الشرطين التاليين :

$$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases} \text{ مع } d = p \gcd(a, b)$$

مسائل

96 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع :

$$s_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

في هذا التمرين يمكن استعمال النتيجة التالية :

$$\gcd(a; b) = 1 \text{ يكافئ } \gcd(a^2; b^2) = 1$$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير

$$s_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \text{ معدوم } n$$

(2) تحقق من أن : $\gcd(k; k+1) = 1$.

برهن أن $\gcd(s_{2k}; s_{2k+1}) = (2k+1)^2$ من أجل k عدد طبيعي غير معدوم .

(3) عين $\gcd(2k+1; 2k+3)$ من أجل k عدد طبيعي .

(4) أحسب $\gcd(s_{2k+1}; s_{2k+2})$ من أجل $k \in \mathbb{N}$.

استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n ، $\gcd(s_n; s_{n+1})$.

97 بكالوريا

a عدد طبيعي غير معدوم .

نسمى (E) مجموعة الأعداد الطبيعية التي تكتب على

الشكل $9 + a^2$. مثلا : $10 = 9 + 1$, $13 = 9 + 4$...

(1) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية :

$9 + a^2 = 2^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 4 .

أ- برهن أنه إذا قبلت المعادلة حلا a فإن a يكون فرديا .

ب- باستعمال القسمة على 4 برهن أن المعادلة لا تقبل حلا .

(2) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية :

$9 + a^2 = 3^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3 .

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير

معدوم n ، $3^{2n} - 1$ يقبل القسمة على 4 .

ب- استنتج الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين 3^{2n}

و 3^{2n+1} على 4 .

ج- برهن أنه إذا قبلت المعادلة حلا a فإن a يكون

زوجيا ؛ واستنتج أن n يكون كذلك زوجيا .

د- حل العدد $3^{2p} - a^2$ ثم استنتج أن المعادلة لا تقبل حلا .

(3) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية :

$9 + a^2 = 5^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

أ- باستعمال القسمة على 3 برهن أنه إذا كان n فرديا

فإن المعادلة لا تقبل حلا .

ب- في حالة n زوجي ، برهن أنه يوجد عدد طبيعي

وحيد a الذي يكون من أجله يكون العدد $9 + a^2$ من قوى

العدد 5 .

98 (1) a عدد طبيعي غير معدوم ويختلف عن 1 . p عدد طبيعي .

أ - أثبت أنه إذا كان d قاسما للعددين $a^p - 1$ و $a^p(a-1)$ فإن d يكون قاسما للعدد $a^p(a-1)$.
ب - أعط القيم الممكنة لـ $PGCD(4^{p+1}-1, 4^p-1)$.

(2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.

أ - تحقق من أن العددين u_2 و u_3 أوليان فيما بينهما .

ب - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = 4u_n + 1$$

ج - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n هو عدد طبيعي .

د - عين $PGCD(u_{n+1}, u_n)$. (يمكن استعمال خوارزمية أقليدس) .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد

$$v_n = u_n + \frac{1}{3} : \text{بـ} : n \text{ طبيعي}$$

أ - برهن أن (v_n) متتالية هندسية . أكتب u_n بدلالة n .

ج - استنتج $PGCD(4^{p+1}-1, 4^p-1)$ من أجل p عدد طبيعي .

99 نقول عن العدد الطبيعي p أنه أولي إذا قبل قاسمين بالاضبط هما 1 و p .

نعتبر ، في المجموعة $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة E ذات المجهولين x و y التالية : $x^2 + y^2 = p^2$ حيث p أولي .

(1) نضع $p = 2$ بين أن المعادلة E لا تقبل حلول .

(2) نفرض أن $p \neq 2$ و $(x; y)$ حل للمعادلة E .

أ - برهن أن العددين x و y أحدهما زوجي والآخر فردي .

ب - برهن أن p لا يقسم x ولا y .

ج - برهن أن $PGCD(x^2, y^2)$ يقسم p^2 .

د - استنتج أن العددين x و y أوليان فيما بينهما .

(3) نفرض أن p هو مجموع مربعين تامين غير معدومين أي $p = u^2 + v^2$ مع u و v عددين طبيعيين غير معدومين

أ - تحقق أن $(|u^2 - v^2|; 2uv)$ هي حل للمعادلة E .

ب - أعط حلا للمعادلة E في حالة $p = 5$ ثم في حالة $p = 13$.

(4) في كل حالة من الحالتين التاليتين بين أن p ليس مجموع مربعين وأن المعادلة E لا تقبل حلول .

أ - $p = 3$. ب - $p = 7$.

100 نعتبر المتتاليتين (x_n) و (y_n) المعرفتين بـ :

$x_0 = 1$; $y_0 = 8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$$

وفي المستوي المنسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر

المستقيم (Δ) ذي المعادلة $5x - y + 3 = 0$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : النقطة

$M_n(x_n; y_n)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

— استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$x_{n+1} = 4x_n + 2$$

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $x_n \in \mathbb{N}$.

— استنتج أن $y_n \in \mathbb{N}$.

(3) نضع $PGCD(x_n; y_n) = d$.

ما هي القيم الممكنة للعدد الطبيعي d .

(4) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$x_n = \frac{5}{3} \times 4^n - \frac{2}{3}$$

— استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد

$$5 \times 4^n - 2$$
 يقبل القسمة على 6 .

101 في كل سؤال اقترح واحد صحيح ما هو؟

(1) باقي قسمة العدد n على 7 هو r حيث :
أ. $r=7$. ب. $r=5$. ج. $r=11$.

(2) من بين الكتابات التالية ، ما هي التي تعرف بقسمة
أقليدية ؟

أ. $63 = 9 \times 6 + 9$.

ب. $75 = (-8)(-9) + 3$.

ج. $46 = 13 \times 3 + 7$.

(3) من بين الكتابات التالية ، ما هي التي تعرف بقسمتين
أقليديتين في نفس الوقت ؟

أ. $68 = 8 \times 7 + 12$.

ب. $70 = 11 \times 6 + 4$.

ج. $33 = 13 \times 3 - 6$.

102 a و b عدنان طبيعيان . من كل سؤال عين

جوابا صحيحا مبررا اختيارك .

(1) نفرض $a - 12b = 15$ و $3 < b < 15$.

أ. باقي قسمة العدد a على 12 هو 15

ب. $PGCD(a; 12)$ هو 1 أو 3 .

ج. $b - 1$ قاسم للعدد a .

(2) نضع العدد $a = 2835$.

أ. العدد a يقبل القسمة على 11 .

ب. مجموعة القواسم المربعة التامة للعدد a هي: $\{9; 81\}$.

ج. العدد a هو جداء عددين أوليين في ما بينهما .

(3) نضع $a = 4487$ ، $b = 14175$ و $F = \frac{a}{b}$.

أ. F كسر غير قابل للاختزال .

ب. يوجد كسر مساويا لـ F مقامه من قوى العدد 15 .

ج. مقلوب F عدد طبيعي .

103 n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

أ. $PGCD(n; n+1) = n$.

ب. $PGCD(n; n+1) = 2$.

ج. $PGCD(n; n+1) = 1$.

104 أذكر الجملة الصحيحة والجملة الخاطئة من بين الجمل

التالية : a و b عدنان طبيعيان .

(1) $PGCD(18a, 24a) = a$ مع $a \in \mathbb{N}^*$.

(2) $PGCD(a, b) = PGCD(a, a-b)$.

(3) $PGCD(a, b) = PGCD(a, a+b)$.

(4) $PGCD(a, b) = PGCD(a, ab)$.

(5) $PGCD(a, b) = PGCD(b, a)$ معناه $a = b$.

(6) a و b غير معدومين .

إذا كان $PGCD(a; b) = d$ فإن $d = \frac{a}{b}$.

105 ميز بين الأصح والخاطئ في كل اقتراح من

الاقتراحات التالية :

(1) جداء عددين من نفس الشفعية هو مضاعف للعدد 2 .

(2) $PGCD(2008, 1000) = PGCD(2008, 8)$.

(3) إذا كان 2 هو باقي قسمة عدد طبيعي n على 5 فإن

4 يكون باقي قسمة n^2 على 5 .

(4) العدد $7^{2008} - 1$ يقبل القسمة على 6 .

(5) المعادلة $16x - 24y = 50$ تقبل على الأقل حلا

$(x_0; y_0)$ في $\mathbb{Z}^2$.

(6) الجملة $\begin{cases} x + y = 33 \\ PGCD(x; y) = 45 \end{cases}$ تقبل على الأقل حلا

$(x_0; y_0)$ في $\mathbb{Z}^2$.

106 a و b عدنان طبيعيان غير معدومين .

ميز الجملة الصحيحة من الجملة الخاطئة .

(1) إذا كان a يقسم b و b يقسم a فإن $a = b$.

(2) إذا كان a و b يقسمان العدد غير المعدوم C فإن 5

هو نفس الباقي لقسمة $C + 5$ على كل من a و b .

(3) إذا كان a يقسم b فإن $PGCD(a; b) = a$.

(4) إذا كان r هو باقي a على b فإن r^2 يكون باقي

قسمة a^2 على b .

(5) باقي قسمة مربع عدد طبيعي فردي على 4 هو 1 .

(6) يوجد عدد طبيعي a حيث يكون $4a + 3$ مريعا تاما .

الكفاءات المستهدفة

- ◆ معرفة واستعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.
- ◆ نشر عدد طبيعي وفق أساس .
- ◆ الانتقال من نظام أساسه α إلى نظام أساسه β .

ابن البناء المراكشي: أحمد بن محمد بن عثمان الأزدي المعروف بأبي العباس بن البناء المراكشي (721-654هـ/1321-1256م) هو عالم **مراكشي** متفنن في علوم جمة، برز بصفة خاصة في الرياضيات، والفلك، والتنجيم، والعلوم الخفية، وكذلك في الطب. قضى أغلب فترات حياته في مسقط رأسه في مراكش، ولذا نسب إليها، وبها درس النحو والحديث والفقه، ثم ذهب إلى **فاس** ودرس الطب والفلك والرياضيات. وكان من أساتذته **ابن مخلوف السجلماسي الفلكي**، و**ابن حجلة الرياضي**. وقد حظي ابن البناء بتقدير ملوك **الدولة المرينية في المغرب** الذين استقدموه إلى فاس مراراً. وتوفي في مدينة مراكش عام 721هـ/1321م.

إسهاماته العلمية: من إسهامات ابن البناء في الحساب أنه أوضح النظريات الصعبة والقواعد المستعصية، وقام ببحوث مستفيضة عن الكسور، ووضع قواعد لجمع مربعات الأعداد ومكعباتها، وقاعدة الخطأين لحل معادلات الدرجة الأولى، والأعمال الحسابية. وأدخل بعض التعديل على الطريقة المعروفة "بطريقة الخطأ الواحد" ووضع ذلك على شكل قانون. وجاء في دائرة المعارف الإسلامية أن ابن البناء قد تفوق على من سبقه من علماء الرياضيات من العرب في الشرق وخاصة في حساب الكسور، كما عُذ من أهم الذين استعملوا الأرقام الهندية في صورتها المستعملة عند المغاربة.

مؤلفاته: ألف ابن البناء أكثر من سبعين كتاباً في الحساب، والهندسة، والجبر، والفلك، والتنجيم، ضاع أغلبها ولم يبق إلا القليل منها، وأشهرها: "كتاب الجبر والمقابلة"، "كتاب الفصول في الفرائض"، "رسالة في المساحات"، "كتاب الأسطرلاب واستعماله".

نشاط أول

في هذا النشاط نريد اكتشاف بعض خواص القسمة الإقليدية على العدد 5. أنجز ورقة المجدول الموالية بإتباع الخطوات التالية:

(1) في العمود A و ابتداء من الخلية A2 أحجز الأعداد من 1 إلى 50 .

في الخلية B2 أحجز $MOD(A2;5)$ (هذا يعني باقي قسمة العدد الموجود في الخلية A2 على 5)

حدد الخلية B2 ثم اسحب إلى تحت . ماذا نلاحظ ؟

(2) في الخليتين E2 و F2 أحجز عددين طبيعيين ثم أحسب باستعمال المجدول في الخلايا G2، H2، I2، J2، K2 و L2 الأعداد n^3 ، n'^2 ، n^3 ، n^2 ، $n \times n'$ ، $n + n'$.

(3) أحسب في الخلايا من E3 إلى L3 بواقي قسمة الأعداد المحصل عليها على 5 .

	A	B
1	n	باقي
2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	4	4
6	5	0
7	6	1
8	7	
9	8	
10	9	
11		
12		

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1					n	n'	n+n'	n'n'	n^2	n'^2	n^3	n'^3
2					632	174	806					
3				باقي	2	4						
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												

(4) أعد نفس العملية بأعداد أخرى.

(5) ماذا يمكن تخمينه بالنسبة لقواعد حساب البواقي ؟

نشاط ثان

يقوم طفل بقفزات وفق محور حيث في كل قفزة يقطع 5 وحدات (الوحدة 10 cm) .

نسمي $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية الأعداد الطبيعية المكونة من الأعداد التي يتوقف فيها الطفل بعد n قفزة علما أنه ينطلق من الوحدة الثانية .

(1) عين u_n بدلالة n .

(2) ما هو الفرق بين حدين متتابعين من المتتالية (u_n) ؟

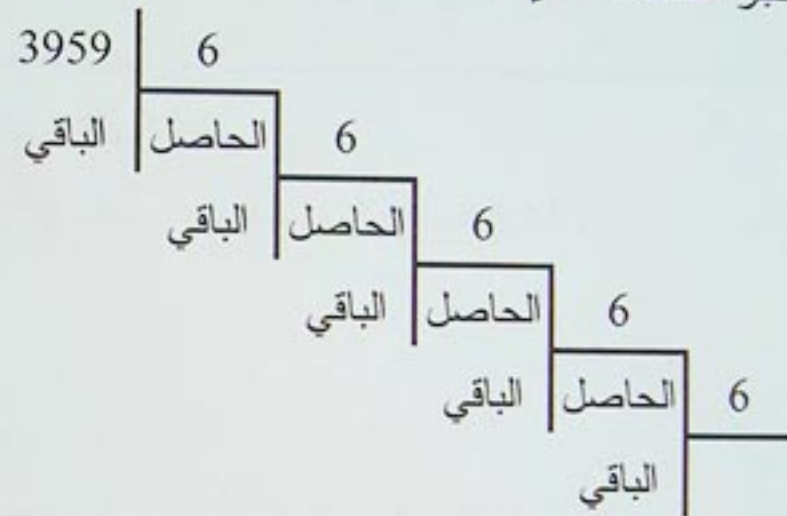
(3) ما هي طبيعة المتتالية (u_n) ؟

(4) الفرق بين حدين من المتتالية (u_n) هو مضاعف أي عدد طبيعي ؟

(5) ما هو باقي قسمة حد كفي من المتتالية (u_n) على العدد 5 ؟

نشاط ثالث

- عالميا ، يستعمل نظام التعداد العشري ، حيث يتركب العدد من الأرقام العشر 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 و 9 وهذا يسمى النظام ذي الأساس 10 .
- في الحضارات القديمة استعمل مختلف نظم التعداد ، استعمل البابليون الأساس 60 ؛ الرومانيون الأساس 12 ؛ أمركا الوسطى الأساس 20 إلى آخره ... الآن يستعمل في الحاسوب النظام الثنائي (ذي الأساس 2) .
- لكتابة عدد في النظام ذي الأساس 6 يجب استعمال 6 أرقام وهي من 0 إلى 5 .
1. عيّن الأعداد a ، b ، c و d بحيث يكون $3959 = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$.
 2. أحسب العدد N حيث $N = 3 \times 6^4 + 0 \times 6^3 + 1 \times 6^2 + 5 \times 6^1 + 5 \times 6^0$.
- الأرقام 3 ، 0 ، 1 ، 5 ، 5 تشكل عددا وهو الكتابة للعدد N في النظام ذي الأساس 6 ونرمز بـ :
- $$N = \overline{55103}$$
3. أنجز القسمة التالية :



شكل العدد المكون من البواقي المحصل عليها . ماذا تلاحظ ؟

نشاط رابع

1. أذكر البواقي الممكنة للقسمة الأقليدية على 5 .
 2. عيّن باقي القسمة الأقليدية على 5 لكل من الأعداد الطبيعية التالية : 2^1 ، 2^2 ، 2^3 و 2^4 .
 3. استعمل جدول إكمال للحصول على بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 5 من أجل $n \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$.
- ملاحظة : استعمل الوظيفة $\text{MOD}(a ; b) = *$ وتعني باقي قسمة العدد a على b .
4. أعط تخميننا لبواقي قسمة 2^n على 5 من أجل n عدد طبيعي .
 5. باستعمال البرهان بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $2^{4p} - 1$ يقبل القسمة على 5 .
 6. استنتج بواقي القسمة الأقليدية على 5 لكل من الأعداد التالية : 2^{4p} ، 2^{4p+1} ، 2^{4p+2} ، 2^{4p+3} مع p عدد طبيعي .

1. تعريف .

تعريف: n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n . و نرمز $a \equiv b[n]$ و نقرأ a يوافق b بترديد n .

أمثلة: $27 \equiv 92[5]$ ، $12 \equiv 34[11]$ ، $24 \equiv 3[7]$ ، $-20 \equiv 1[7]$ ، $-59 \equiv -3[8]$.

ملاحظات: من أجل كل عدد صحيح x ، $x \equiv 0[1]$.

ترميز آخر $a \equiv b(n)$.

2. مبرهنة .

مبرهنة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n ، إذا و فقط إذا كان $a - b$ مضاعف لـ n .

البرهان: نفرض أن a و b لهما نفس الباقي r في القسمة الإقليدية على n .

و منه نضع $a = nq + r$ و $b = nq' + r$ حيث q و q' عددين صحيحين و $0 \leq r < n$.

$$a - b = nq + r - nq' - r = n(q - q')$$

بما أن $q - q'$ عدد صحيح فإن $a - b$ مضاعف لـ n .

عكسيا: نفرض $a - b$ مضاعف لـ n . يوجد عدد صحيح k حيث أن $a - b = kn$.

ليكن r باقي قسمة b على n .

لدينا $b = nq + r$ ، حيث q عدد صحيح و $0 \leq r < n$.

و منه $a = b + kn = nq + r + kn = (q + k)n + r$.

بما أن $q + k$ عدد صحيح و $0 \leq r < n$ فإن r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على n .

ومنه a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n .

نتيجة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. a و b متوافقان بترديد n إذا و فقط إذا كان $a - b$ مضاعف لـ n .

3. خواص .

خاصية 1: n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 ($n \geq 2$).

كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n ، بترديد n .

البرهان: a عدد صحيح و r باقي قسمته على n ، $0 \leq r < n$.

نعلم أن $a = nq + r$ حيث q عدد صحيح ، و منه $a - r = nq$.

و بالتالي $a - r$ مضاعف لـ n .

تمرين محلول 1: في الترددات الآتية أذكر الصحيحة و الخاطئة .

- (1) $26 \equiv 11[5]$ ؛ (2) $-32 \equiv 18[10]$ ؛ (3) $478 \equiv 32[5]$ ؛ (4) $58 \equiv -5[7]$ ؛
(5) $63^2 \equiv 14[5]$ ؛ (6) $144 \equiv 11[19]$ ؛ (7) $131^2 \equiv 25[12]$ ؛ (8) $48^3 \equiv 36[7]$

طريقة: للبرهان على أن $a \equiv b[n]$ يمكن البرهان على أن $a - b$ مضاعف لـ n أو البرهان على أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n .

الحل:

- (1) $26 - 11 = 15$ و $15 = 3 \times 5$ إذن $26 \equiv 11[5]$ صحيحة .
(2) $-32 - 18 = -50$ و $-50 = (-5) \times 10$ إذن $-32 \equiv 18[10]$ صحيحة .
(3) $478 - 32 = 446$ و $446 = 89 \times 5 + 1$ إذن $478 \equiv 32[5]$ خاطئة .
(4) $58 + 5 = 63$ و $63 = 9 \times 7$ إذن $58 \equiv -5[7]$ صحيحة .
(5) $63 = 12 \times 5 + 3$ و $63^2 = (12 \times 5 + 3)^2$ و منه $63^2 = 12^2 \times 5^2 + 2 \times 12 \times 5 \times 3 + 9$ أي $63^2 = 5(720 + 71) + 14$ إذن $63^2 \equiv 14[5]$ صحيحة .
(6) $144 = 19 \times 7 + 11$ و $11 = 19 \times 0 + 11$ تحصلنا على نفس الباقي في القسمة على 19 إذن $144 \equiv 11[19]$ صحيحة .
(7) $131^2 = 1430 \times 12 + 1$ و $25 = 2 \times 12 + 1$ تحصلنا على نفس الباقي في القسمة على 12 إذن $131^2 \equiv 25[12]$ صحيحة .
(8) $48^3 = 15799 \times 7 + 6$ و $36 = 5 \times 7 + 1$ لم نتحصل على نفس الباقي في القسمة على 7 إذن $48^3 \equiv 36[7]$ خاطئة .

تمرين محلول 2: l عدد طبيعي غير معدوم و يختلف عن 1 :

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ أساسها l .

أثبت أن حدين كفيين من المتتالية (u_n) متوافقان بترديد l .

الحل:

نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا $u_n = u_0 + nl$.

ليكن u_k و u_p حدين من هذه المتتالية ،

لدينا : $u_k = u_0 + kl$ و $u_p = u_0 + pl$ ، k و p عددان طبيعيان .

$$\text{و منه } u_p - u_k = u_0 + pl - u_0 - kl$$

$$\text{و منه } u_p - u_k = pl - kl$$

$$\text{و منه } u_p - u_k = l(p - k)$$

و بالتالي $u_p - u_k$ مضاعف للعدد l ، و منه $u_p \equiv u_k[l]$ و منه

خاصية 2: n عدد طبيعي غير معدوم. من أجل كل عدد صحيح a لدينا $a \equiv a[n]$.

البرهان: a عدد صحيح. a و a لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n و منه $a \equiv a[n]$.

خاصية 3: n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عدنان صحيحان. إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$.

البرهان: a و b عدنان صحيحان حيث $a \equiv b[n]$.

$a \equiv b[n]$ يعني $a - b = kn$ (k عدد صحيح) ومنه $b - a = -kn$. بما أن $-k$ عدد صحيح فإن $b \equiv a[n]$.

خاصية 4: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b و c أعداد صحيحة. إذا كان $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإن $a \equiv c[n]$.

البرهان: a ، b و c أعداد صحيحة حيث أن $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$.

$(a \equiv b[n] \text{ و } b \equiv c[n])$ يعني $(a - b = kn \text{ و } b - c = k'n)$ (k و k' عدنان صحيحان)

و منه و بالجمع نحصل على $a - c = (k + k')n$. بما أن $k + k'$ عدد صحيح فإن $a \equiv c[n]$.

خاصية 5: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة:

إذا كان $(a \equiv b[n] \text{ و } c \equiv d[n])$ فإن $a + c \equiv b + d[n]$.

البرهان: a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث أن $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$.

$(a \equiv b[n] \text{ و } c \equiv d[n])$ يعني $(a - b = kn \text{ و } c - d = k'n)$ (k و k' عدنان صحيحان)

ومنه و بالجمع نحصل على $(a + c) - (b + d) = (k + k')n$. بما أن $k + k'$ عدد صحيح فإن $a + c \equiv b + d[n]$.

خاصية 6: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة:

إذا كان $(a \equiv b[n] \text{ و } c \equiv d[n])$ فإن $ac \equiv bd[n]$.

البرهان: a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث أن $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$.

$(a \equiv b[n] \text{ و } c \equiv d[n])$ يعني $(a - b = kn \text{ و } c - d = k'n)$ (k و k' عدنان صحيحان)

لدينا $ac - bd = ac - ad + ad - bd = a(c - d) + d(a - b) = ak'n + dkn = (ak' + dk)n$

بما أن $ak' + dk$ عدد صحيح فإن $ac \equiv bd[n]$.

خاصية 7: n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عدنان صحيحان.

من أجل كل عدد صحيح k ، إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $ka \equiv kb[n]$.

البرهان: a و b عدنان صحيحان حيث أن $a \equiv b[n]$. ليكن k عددا صحيحا.

$k \equiv k[n]$ إذن بتطبيق الخاصية 6 نحصل على $ka \equiv kb[n]$.

خاصية 8: n و p عدنان طبيعيين غير معدومين. a و b عدنان صحيحان. إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$.

البرهان: a و b عدنان صحيحان حيث $a \equiv b[n]$. (نستعمل البرهان بالتراجع)

من أجل $p = 1$ لدينا $a \equiv b[n]$ (من المعطيات)

نفرض $a^k \equiv b^k[n]$ صحيحة من أجل عدد طبيعي $k \geq 1$.

بتطبيق الخاصية 7، $a^k \times a \equiv b^k \times b[n]$ أي $a^{k+1} \equiv b^{k+1}[n]$. إذن الخاصية وراثية ابتداء من $p = 1$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p . إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$.

تمرين محلول 1: عين باقي قسمة $5817 -$ على 251 .

طريقة: لإيجاد باقي قسمة عدد صحيح سالب a على عدد طبيعي غير معدوم n نبحث عن b باقي قسمة $-a$ على n ثم نضرب الطرفين في -1 ثم نضيف التردد إلى $-b$.

الحل:

بقسمة العدد 5817 على 251 نحصل على $5817 \equiv 44[251]$.
نضرب الطرفين في -1 نحصل على $-5817 \equiv -44[251]$ (الخاصية 7).
نعلم أن $251 \equiv 0[251]$ و منه $251[251] \equiv 0$ (الخاصية 3).
($-5817 \equiv -44[251]$ و $0 \equiv 251[251]$) إذن من الخاصية 5 نحصل على $-5817 \equiv 207[251]$.
إذن باقي قسمة -5817 على 251 هو 207 لأن $0 \leq 207 < 251$.

تمرين محلول 2: (1) عين المجموعة L مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أن $x+4 \equiv 2[7]$.
(2) عين المجموعة L' مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أن $5x \equiv 3[7]$.

طريقة: في السؤال الثاني ندرس كل البواقي الممكن الحصول عليها في القسمة على 7

الحل:

(1) في $x+4 \equiv 2[7]$ نطبق الخاصية 5 و منه $x+4-4 \equiv 2-4[7]$ و بالتالي $x \equiv -2[7]$ وبما أن $-2 \equiv 5[7]$ فإن $x \equiv 5[7]$ (الخاصية 4).
عكسيا فإن $(7k+5)+4 \equiv 2[7]$ لأن $7 \equiv 0[7]$ و $9 \equiv 2[7]$.
إذن المجموعة L هي مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $7k+5$ حيث k عدد صحيح.
(2) عدد صحيح يمكن أن يوافق كل بواقي القسمة على 7، ثم نطبق الخاصية 7.
نلخص النتائج في جدول.

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$5x \equiv$	0	5	3	1	6	4	2

عكسيا فإن $5(7k+2) \equiv 3[7]$ لأن $35 \equiv 0[7]$ و $10 \equiv 3[7]$.

إذن المجموعة L' هي مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $7k+2$ حيث k عدد صحيح.

تمرين محلول 3: عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 3^n على 5. استنتج باقي قسمة 3^{4039} على 5.

طريقة: في مثل هذه التمارين نحاول إيجاد عدد طبيعي $k \neq 0$ حيث $a^k \equiv 1[p]$ (هذا يستحيل في بعض الحالات).

الحل:

نعين بواقي القوى المتتالية للعدد 3^n على 5.
 $3^0 \equiv 1[5]$ ، $3^1 \equiv 3[5]$ ، $3^2 \equiv 4[5]$ ، $3^3 \equiv 2[5]$ ، $3^4 \equiv 1[5]$.
 $3^4 \equiv 1[5]$ من الخاصية 8 أي $3^{4k} \equiv 1[5]$ k عدد طبيعي.
بتطبيق الخاصية 4 ، $3^{4k+1} \equiv 3[5]$ ، $3^{4k+2} \equiv 4[5]$ ، $3^{4k+3} \equiv 2[5]$ و $3^{4k+4} \equiv 1[5]$.
 $4039 = 4 \times 1009 + 3$ من الشكل $4k+3$ إذن $3^{4039} \equiv 2[5]$.

1. مبرهنة .

مبرهنة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماماً من 1. كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل $a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots + r_2x^2 + r_1x + r_0$ حيث $0 \leq r_0 < x$ و $0 < q < x$ مع $a \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$

البرهان: a عدد طبيعي أكبر من أو يساوي العدد الطبيعي x غير المعدوم و الأكبر تماماً من 1 .

ليكن r_0 باقي قسمة a على x . لدينا $a = c_0x + r_0$ حيث c_0 عدد صحيح و $0 \leq r_0 < x$.

* إذا كان $c_0 < x$ المبرهنة محققة.

إذا كان $c_0 \geq x$ توجد ثنائية وحيدة $(c_1; r_1)$ من الأعداد الطبيعية حيث $c_0 = c_1x + r_1$ مع $0 \leq r_1 < x$ و $0 < c_1 < c_0$.

* إذا كان $c_1 < x$ لدينا $a = c_1x^2 + r_1x + r_0$ المبرهنة محققة.

إذا كان $c_1 \geq x$ توجد ثنائية وحيدة $(c_2; r_2)$ من الأعداد الطبيعية حيث $c_1 = c_2x + r_2$ مع $0 \leq r_2 < x$ و $0 < c_2 < c_1$.

* نواصل حتى يصبح حاصل القسمة q على x أصغر تماماً من x .

نحصل تباعاً على ما يلي :

$$(1) \dots a = c_0x + r_0 \text{ مع } 0 \leq r_0 < x \text{ و } 0 < c_0 < a$$

$$(2) \dots c_0 = c_1x + r_1 \text{ مع } 0 \leq r_1 < x \text{ و } 0 < c_1 < c_0$$

$$(3) \dots c_1 = c_2x + r_2 \text{ مع } 0 \leq r_2 < x \text{ و } 0 < c_2 < c_1$$

.....

$$(n-1) \dots c_{n-3} = c_{n-2}x + r_{n-2} \text{ مع } 0 \leq r_{n-2} < x \text{ و } 0 < c_{n-2} < c_{n-3}$$

$$(n) \dots c_{n-2} = c_{n-1}x + r_{n-1} \text{ مع } 0 \leq r_{n-1} < x \text{ و } 0 < c_{n-1} < c_{n-2}$$

نضرب المساواة (1)، (2)، (3)، ...، (n-1)، (n) في $1, x, x^2, \dots, x^{n-2}, x^{n-1}$ على الترتيب و بجمع

النتائج المحصل عليها طرف بطرف نحصل على :

$$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots + r_2x^2 + r_1x + r_0 \text{ (مع وضع } q = c_{n-1} \text{) و منه المبرهنة محققة.}$$

2. التعداد ذو الأساس x .

قاعدة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماماً من 1. يعتمد التعداد ذو الأساس x على الاصطلاحين التاليين :

(1) إذا كان $a < x$ (a عدد طبيعي) a يمثل برمز وحيد يسمى رقماً.

(2) إذا كان $a \geq x$ (a عدد طبيعي) من المبرهنة a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x :

$$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots + r_2x^2 + r_1x + r_0 \text{ حيث}$$

$$0 < q < x \text{ و } 0 \leq r_0 < x \text{ مع } a \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$$

يمثل العدد a كما يلي $a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0}$.

الكتابة $a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x . إذا كان $x = 10$ ، نكتب :

$$a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0}$$

تمرين محلول 1: عدد طبيعي يكتب $\overline{365}$ في النظام ذي الأساس 7 . أكتب a في النظام العشري .

الحل:

$$a = 3 \times 7^2 + 6 \times 7 + 5 = 194 \text{ و منه } a \text{ يكتب } 194 \text{ في النظام العشري .}$$

تمرين محلول 2: عدد طبيعي يكتب $\overline{2517}$ في النظام العشري . أكتب a في النظام ذي الأساس 8 .

الحل:

$$2517 = 314 \times 8 + 5 = 39 \times 8^2 + 2 \times 8 + 5$$

$$2517 = 4 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 2 \times 8 + 7$$

و منه a يكتب $\overline{4727}$ في النظام ذي الأساس 8 .

تمرين محلول 3: عدد طبيعي يكتب $\overline{643}$ في النظام ذي الأساس 8 .

(1) أكتب a في النظام ذي الأساس 2 بطريقتين.

• بالمرور عبر النظام العشري .

• مباشرة .

(2) أكتب a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة .

الحل:

(1) • $a = 6 \times 8^2 + 4 \times 8 + 3 = 419$ و منه a يكتب 419 في النظام العشري .

$$419 = 209 \times 2 + 1 = 104 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$$

$$419 = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$$

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2 .

$$a = 6 \times 8^2 + 4 \times 8 + 3$$

$$a = 3 \times 2 \times 8^2 + 2^2 \times 8 + 3$$

$$a = 3 \times 2^7 + 2^5 + 2 + 1$$

$$a = (2 + 1) \times 2^7 + 2^5 + 2 + 1$$

$$a = 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2 + 1$$

$$\text{و منه } a = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$$

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2 .

$$(2) \quad a = 6 \times 8^2 + 4 \times 8 + 3$$

$$a = 6 \times 2^2 \times 4^2 + 4 \times 2 \times 4 + 3$$

$$a = 6 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 3$$

$$a = (2 + 4) \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 3$$

$$a = 4^4 + 2 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 3$$

$$a = 1 \times 4^4 + 2 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 0 \times 4 + 3$$

إذن a يكتب $\overline{12204}$ في النظام ذي الأساس 4 .

N عدد طبيعي يكتب $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ في النظام العشري $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ أعداد طبيعية أصغر تماماً من 10 و a_n عدد طبيعي غير معدوم أصغر تماماً من 10 .

نريد تعيين شروط قابلية القسمة على كل من الأعداد 10 ، 2 ، 5 ، 3 ، 9 ، 4 و 11

1. • باستعمال الترييدة $10 \equiv 0 [10]$ ، أثبت أن $N \equiv a_0 [10]$.

• استنتج شروط قابلية القسمة على 10 .

• من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 10 : 25810 ، 4328367 ، 851a (ناقش)

تبعاً لقيم الرقم الطبيعي a) .

2. • باستعمال الترييدة $10 \equiv 0 [2]$ ، أثبت أن $N \equiv a_0 [2]$.

• استنتج شروط قابلية القسمة على 2 .

• من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 2 : 37891 ، 7318964 ، 378488 .

3. • باستعمال الترييدة $10 \equiv 0 [5]$ ، أثبت أن $N \equiv a_0 [5]$.

• استنتج شروط قابلية القسمة على 5 .

• من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 5 : 34915 ، 4417347 ، 266480 .

4. • باستعمال الترييدة $10 \equiv 1 [3]$ ، أثبت أن $N \equiv (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) [3]$.

• استنتج شروط قابلية القسمة على 3 .

• من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 3 : 25881 ، 728548 ، 264493 .

5. • باستعمال الترييدة $10 \equiv 1 [9]$ ، أثبت أن $N \equiv (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) [9]$.

• استنتج شروط قابلية القسمة على 9 .

• من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 9 : 25881 ، 275841 ، 624599 ،

8129736 ، 54756a (ناقش تبعاً لقيم الرقم الطبيعي a) .

6. • عين تبعاً لقيم العدد الطبيعي p باقي قسمة 10^p على 4 .

• استنتج أن $N \equiv 10a_1 + a_0 [4]$.

• ما هي كتابة $10a_1 + a_0$ في النظام العشري ؟

• استنتج شروط قابلية القسمة على 4 .

• من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 4 : 38924 ، 74820 ، 85930 .

• بنفس الطريقة استنتج شروط قابلية القسمة على 16 .

7. • باستعمال الترييدة $10 \equiv -1 [11]$:

اثبت أن $N \equiv (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_2 - a_1 + a_0 [11]$

• استنتج شروط قابلية القسمة على 11 .

• من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 11 : 3658721 ، 287392358 ،

51829941 ، 7345591



مفتاح حساب .

في نظام تحقق من صحة البضائع توضع لصيقة عليها الترميز بالأعمدة والذي يشمل على 12 الرقم متبوع بالرقم الثالث عشر وهو المفتاح .

الجدول يعبر عن الترميز بالأعمدة : $[R] \quad [C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7 C_8 C_9 C_{10} C_{11} C_{12}]$ حيث R هو المفتاح ؛ $C_1, C_2, \dots, C_{12}$ هي أرقام الترميز وهي أعداد طبيعية محصورة بين 0 و 9 .

1. كيفية تعيين المفتاح .

لمعرفة صحة اللصيقة ، بحسب المفتاح R بالطريقة التالية : $3S_i + S_p + R \equiv 0[10]$ حيث : $S_p = C_2 + C_4 + C_6 + C_8 + C_{10} + C_{12}$ ، $S_i = C_1 + C_3 + C_5 + C_7 + C_9 + C_{11}$.

2. إيجاد المفتاح .

1. في اللصيقة المعطاة أعلاه لدينا : $R = 4$ ، $C_1 = 0$ ، $C_2 = 1$... إلخ .

تحقق من أن الترميز لهذه اللصيقة صحيح .

2. أحسب مفتاح المرفق للترميز التالي : $[R] \quad [5 \ 1 \ 6 \ 0 \ 3 \ 2 \ 4 \ 2 \ 1 \ 5 \ 3 \ 7]$

3. بين أن الترميزين التاليين لهما نفس المفتاح :

$[R] \quad [a \ 7 \ b \ 0 \ 4 \ 1 \ 5 \ 6 \ 3 \ 6 \ 6 \ 2]$

$[R] \quad [b \ 7 \ a \ 0 \ 4 \ 1 \ 5 \ 6 \ 3 \ 6 \ 6 \ 2]$

4. عين c حتى يكون الترميز على اللصيقة التالية صحيحا . $[8] \quad [3 \ 9 \ 9 \ 4 \ 2 \ c \ 2 \ 0 \ 0 \ 3 \ 4 \ 1]$

5. في اللصيقة الموالية استبدل رقمين بحرفين d و e .

$[1] \quad [d \ e \ 9 \ 3 \ 6 \ 7 \ 3 \ 5 \ 8 \ 0 \ 2 \ 1]$

بين أن : $e \equiv -3b - 1[10]$. استنتج القيم الممكنة للثنائية $(e; d)$

حل معادلة من الشكل $ax + by = c$.

1. دراسة مثال .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $5x - 8y = 3 \dots (1)$.

- تأكد أن $(7; 4)$ حل للمعادلة .
- أثبت أنه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $5x \equiv 3[8]$.
- عين الأعداد الصحيحة x حيث : $5x \equiv 3[8]$.
- أثبت أن كل حلول المعادلة (1) هي من الشكل $(8k + 7; 5k + 4)$ حيث k عدد صحيح .

2. دراسة الحالة العامة .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $ax + by = c$ ، حيث a, b, c أعداد طبيعية .

- أثبت أن المعادلة تقبل حلول إذا وفقط إذا كان a و b أوليين فيما بينهما أو c يقبل القسمة على $PGCD(a; b)$.
- أثبت أنه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة فإن $ax \equiv c[b]$.
- أثبت أنه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة فإن $by \equiv c[a]$.

3. تطبيق .

- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $7x + 12y = 5$.
- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $20x - 45y = 5$.
- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $6x - 8y = 9$.

موضوع محلول

تمرين : (بكالوريا)

1. أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 9 .

ب- برهن إذن $2005^{2005} \equiv 7[9]$.

2. أ- برر أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $10^n \equiv 1[9]$.

ب- N عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري ، نسمي

S مجموع أرقامه . برهن العلاقة التالية : $N \equiv S[9]$.

ج- استنتج أن : يكون N قابلا للقسمة على 9 إذا وفقط

إذا كان S قابلا للقسمة على 9 .

3. نفترض أن $A = 2005^{2005}$ ،

نضع : B مجموع أرقام العدد A .

C مجموع أرقام العدد B . D مجموع أرقام العدد C .

أ- برر أن $A \equiv D[9]$.

ب- علما أن $10000 < 2005$ ، برهن أن العدد A

يكتب في التعداد العشري على الأكثر بـ 8020 رقما .

استنتج أن $B \leq 72180$.

ج- برهن أن $C \leq 45$.

د- بدراسة قائمة الأعداد الطبيعية الأصغر من 45 ،

عين عنصرا حادا للعدد D أصغر من 15 .

هـ- برهن أن $D = 7$.

حل مختصر

تعاليق

1. أ- $7 \equiv 7[9]$ ، $7^2 \equiv 4[9]$ ، $7^3 \equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي k ،

$7^{3k} \equiv 1[9]$ وعليه $7^{3k+1} \equiv 7[9]$ ؛ $7^{3k+2} \equiv 4[9]$.

ب- $2005 \equiv 7[9]$ ومنه $2005^{2005} \equiv 7^{2005}[9]$. $2005^{2005} = 7^{3 \times 668 + 1}$ إذن

$2005^{2005} \equiv 7[9]$ ومنه $2005^{2005} \equiv 7[9]$.

2. أ- $10 \equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $10^n \equiv 1^n[9]$ أي $10^n \equiv 1[9]$.

ب- نضع $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ ومنه $S = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$.

$N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$. بما أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،

$10^n \equiv 1[9]$ فإن $N \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0[9]$ أي $N \equiv S[9]$.

ج- N يقبل للقسمة على 9 معناه $N \equiv 0[9]$ ومعناه $N \equiv S[9]$ ويكافئ

$S \equiv 0[9]$ أي S يقبل للقسمة على 9 .

3. أ- من السؤال 2 - ب- ينتج $A \equiv B[9]$ ؛ $B \equiv C[9]$ و $C \equiv D[9]$

ومنه بالتعدي نستنتج $A \equiv D[9]$.

ب- $2005 < 10^4$ ومنه $2005^{2005} < 10^{8020}$ إذن $A < 10^{8020}$

لدينا $10^k = \underbrace{10 \dots 0}_{k \text{ أصفار}}$ إذن يكتب العدد 10^k بـ $(k+1)$ رقما ومنه كل عدد أصغر

من 10^k يكتب بـ k رقما على الأكثر . بما أن $A < 10^{8020}$ فإن العدد A يكتب

بـ 8020 رقما على الأكثر . كل رقم من العدد A يكون أصغر من أو يساوي

9 إذن $B \leq 9 \times 8020$ أي $B \leq 72180$.

ج- $72180 < 10^5$ إذن $B < 10^5$ ؛ كل رقم من العدد B يكون أصغر من أو

يساوي 9 إذن $C \leq 5 \times 9$ أي $C \leq 45$.

د- نضع $C = \overline{ab}$ في النظام العشري إذن $D = a + b$ لدينا $C \leq 45$ إذن

$0 \leq a \leq 4$ ولدينا أيضا $0 \leq b \leq 9$ ،

ومنه $0 \leq a + b \leq 4 + 9$ أي $0 \leq a + b \leq 13$ ومعناه $D \leq 13$.

ج- لدينا $A \equiv D[9]$ معناه $D \equiv A[9]$ ولدينا $A \equiv 7[9]$ إذن $D \equiv 7[9]$

وبما أن $D \leq 13$ فإن $D = 7$.

مراعاة شروط حول الأرقام حسب

أساس النظام .

$0 \leq 9k + 7 \leq 13$ معناه $k = 0$

تنبيه

المطلوب قراءة السؤال لكي لا تخرج عن الموضوع أو تتوسع فيما هو غير مطلوب .
يمكن أن يتم حل تمرين بعدة طرائق (البرهان بالتراجع ، الموافقات ...) ، لكن
إجابتك مقيدة بالزمن ولذا ينبغي نبني الطريقة التي يستغرق حلها أقصر مدة ممكنة.
التمرين عموما متشعبا ومكونا من عدة محاور كما هو حال التمرين الموالي ومع ذلك
نجد تسلسلا وتوجيها في الأسئلة المطروحة .

تمرين (بكالوريا)

- في كل التمرين ، n يُعتبر عدد طبيعي غير معدوم .
- من أجل $1 \leq n \leq 6$ ، أحسب بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7 .
 - برهن أنه من أجل كل عدد n ، $3^{n+6} - 3^n$ يقبل القسمة على 7 .
 - استنتج أن 3^n و 3^{n+6} لهما نفس الباقي لقسمتهما على 7 .
 - باستعمال النتائج السابقة ، أحسب باقي القسمة الأقليدية للعدد 3^{1000} على 7 .
 - في الحالة العامة ، كيف يمكن حساب البواقي لقسمة العدد 3^n على 7 من أجل n كيفي ؟
 - استنتج أنه من أجل كل عدد n ، العددين 3^n و 7 أوليان فيما بينهما .
 - ليكن $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$ مع $n \geq 2$.
 - بين أنه إذا كان U_n يقبل القسمة على 7 فإن $3^n - 1$ يقبل القسمة على 7 .
 - عكسيا ، بين أنه إذا كان $3^n - 1$ يقبل القسمة على 7 فإن U_n يقبل القسمة على 7 .
 - استنتج قيم n التي يكون من أجلها U_n يقبل القسمة على 7 .

توجيهات

- للحصول على البواقي المطلوبة ، جد الباقي الأول والثاني ثم حاول أن تستعمل الخواص على الأسس $3^3 = 3 \times 3^2$ ، $3^4 = (3^2)^2$ ، ...
- تجنب البرهان بالتراجع محاولا أن تحلل العبارة $3^{n+6} - 3^n$.
- و مما سبق استنتج أن البواقي تشكل متتالية دورية . ثم جد باقي قسمة 1000 على دور هذه المتتالية .
- فكر في القاسم المشترك الوحيد هو 1 .
- استعمل مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية .
- تحقق من أن : $3^n - 1 = 7k$ معناه $2U_n = 7k$ ثم بين أن k عدد زوجي باعتبار أن U_n عدد طبيعي (يمكن استعمال بسهولة مبرهنة غوص الموجودة في المحور الثالث).

1 برر صحة العبارات التالية :

أ - $45 \equiv 3[7]$ ب - $152 \equiv 2[3]$

ج - $29 \equiv -1[6]$ د - $137 \equiv -3[5]$

و - $-13 \equiv 2[5]$ هـ - $-17 \equiv -7[10]$

2 عين خمسة أعداد صحيحة x ، تحقق $37 \equiv x[4]$

ما هو العدد الطبيعي x الذي يكون أصغر تماما من 4 ؟

3 عين كل الأعداد الطبيعية n الأصغر من 30 حيث :

$n \equiv 4[7]$

4 n عدد صحيح يحقق $n \equiv 140[12]$ ،

عين باقي قسمة العدد n على 12 .

5 x عدد صحيح ، باقي قسمته على 7 هو 2 .

عين باقي القسمة على 7 لكل من الأعداد الصحيحة

التالية : $x+5$ ؛ $x-5$ ؛ $9x$ ؛ $-15x$ ؛ x^3 .

6 n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

في كل حالة ، عين قيم العدد n التي تحقق الموافقة المقترحة .

أ - $46 \equiv 0[n]$ ؛

ب - $10 \equiv 1[n]$ ؛

ج - $27 \equiv 5[n]$.

7 m و n عدنان طبيعيان غير معدومين .

a و b عدنان صحيحان .

أثبت أن $a \equiv b[n]$ يكافئ $am \equiv bm[nm]$

8 n عدد طبيعي . A ، B ، C ، a ، b و c

أعداد صحيحة .

برهن أنه إذا كانت الفوارق $A-a$ ، $B-b$ و $C-c$

تقبل القسمة على n فإن الفرق $(ABC-abc)$ يقبل

كذلك القسمة على n .

9 m و n عدنان طبيعيان غير معدومين حيث :

$n \equiv 0[m]$

a و b عدنان صحيحان .

أثبت أنه إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a \equiv b[m]$.

10 نضع : $a \equiv 30757[10]$ ؛ $b \equiv 15163[10]$ ؛

و $c \equiv 12924[10]$.

(1) بسط الموافقات المعطاة .

(2) استنتج العدد المحصور بين 0 و 9 ، والتي تكون

الأعداد المقترحة أدناه توافقه بالترديد 10 .

أ - $a+b+c$ ؛ ب - $a-b+c$ ؛

ج - $a+b-c$ ؛ د - abc ؛

هـ - $ab+ac+bc$ ؛ و - $a^2+b^2+c^2$.

11 كم كانت تشير الساعة حيث :

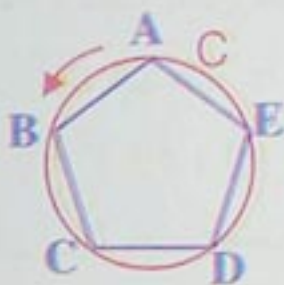
أ - بعد 112 الساعة أشارت الثالثة ؟

ب - قبل 153 الساعة أشارت الثالثة ؟

(مع ذكر صباحا أم مساء)

12 المضلع المنتظم $ABCDE$ ، محيط بالدائرة C .

M نقطة متحركة على الدائرة ، نقطة انطلاقها هي A .



نفرض الاتجاه المباشر هو اتجاه السهم .

جد نقطة الوصول للنقطة M في كل من الحالتين التاليتين :

أ - النقطة M تقطع 15123 قوسا متتابعة في الاتجاه

المباشر .

ب - النقطة M تقطع 15132 قوسا متتابعة في الاتجاه

غير المباشر .

13 عين باقي قسمة العدد 12^{1527} على 5 .

14 عين بواقي القسمة الأقليدية على 5 لكل من الأعداد :

371^{238} ؛ 579^{2008} ؛ 1429^{2009} ؛ 1954^{1962} .

15 جد بواقي القسمة الأقليدية على 9 للأعداد :

1754^{12} ، 34572^{457} و 375^{2009} .

16 برهن أن :

أ - $1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + 4^{2003}$ يقبل القسمة على 5 .

ب - $1^{2007} + 2^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} + 5^{2007} + 6^{2007}$ يقبل

القسمة على 7 .

ب - استنتج مجموعة قيم العدد الصحيح x حيث :

$$2x \equiv 3[5]$$

27 عين قيم الأعداد الطبيعية n ، التي يكون من أجلها العدد $n^3 + n - 2$ قابلا للقسمة على 7 .

28 من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع r_n باقي القسمة الأقلدية للعدد 2^n على 9 .

n	0	1	2	3	4	5	6
r_n							

(1) أتمم الجدول التالي :

(2) استنتج r_n من أجل كل عدد طبيعي n .

(3) عين ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الأقلدية للعدد 65^n على 9 .

(4) استنتج باقي قسمة 65^{2011} على 9 .

29 أ - جد باقي قسمة العدد 4^5 على 11 .

ب - استنتج بواقي القسمة على 11 لكل من الأعداد : 37^{5k+4} و 37^{5k+3} ؛ 37^{5k+2} ؛ 37^{5k+1} ؛ 37^{5k} مع $k \in \mathbb{N}$.

30 عين كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الصحيحة التي تحقق : $2x = 3y$.

31 حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية : $2x - 5y = 1$.

32 حل في $\mathbb{Z}$ كل من الجملتين التاليتين :

$$\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases} \text{ ب - } \begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases} \text{ أ -}$$

2 - التعداد

33 أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس العشري .

$$c = 503019 \quad ; \quad b = 5723 \quad ; \quad a = 12734$$

34 أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس 6 .

$$c = \overline{503012} \quad ; \quad b = \overline{1523} \quad ; \quad a = \overline{234}$$

35 أكتب في النظام ذي الأساس 7 كل من الأعداد الطبيعية التالية :

$$a = 7^3 + 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5$$

$$- 6^{2008} + 5^{2008} - 4^{2008} + 3^{2008} - 2^{2008} + 1^{2008}$$

$$+ 7^{2008} - 8^{2008} \text{ يقبل القسمة على } 9 .$$

17 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد

$$1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1}$$
 قابلا للقسمة على 4 .

18 برّر أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$3532^n \equiv 0[2] ; 7254^n \equiv 0[9] ;$$

$$51502^n \equiv 0[11] ; 1785^n \equiv 0[5]$$

19 (1) عين باقي القسمة الأقلدية للعدد 3286^{374}

على 10 .

(2) عين باقي القسمة الأقلدية للعدد 76^{784} على 12 .

20 (1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون

$$3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$$

(2) أثبت أنه إذا كان n عددا طبيعيا ليس مضاعفا للعدد 3

$$\text{فإن } 2^{2n} + 2^n + 1 \text{ يقبل القسمة على } 7 .$$

21 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

$$(1) \quad 3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0[5]$$

$$(2) \quad 3^{3n+1} + 2^{n+1} \text{ يقبل القسمة على } 5 .$$

22 n عدد طبيعي ، نضع : $\alpha = (9n - 1)10^n + 1$.

برهن أن العدد α مضاعف للعدد 9 .

23 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

$$(1) \quad 2^{6n+3} + 3^{4n+2} \text{ يقبل القسمة على } 17 .$$

$$(2) \quad 2^{5n+1} + 3^{n+3} \text{ يقبل القسمة على } 29 .$$

24 n عدد طبيعي .

(1) جد ، تبعا لقيم n ، باقي قسمة n^2 على 4 .

(2) برهن أنه إذا كان n عددا طبيعيا فرديا فإن :

$$n^2 \equiv 1[8]$$

25 (1) برهن أنه إذا كان n عددا طبيعيا فرديا فإن :

$$n^4 \equiv 1[16]$$

(2) برهن أنه إذا كان العدد الطبيعي n ليس مضاعفا

للعدد 5 فإن باقي قسمة n^4 على 5 هو 1 .

26 أ - x عدد صحيح . أتمم الجدول التالي :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$2x \equiv$						[5]

أكتب العدد n في النظام ذي الأساس 12 ثم في النظام
ذي الأساس 7 .

47 أكتب في النظام العشري العدد $\overline{3752}$ المكتوب في
النظام ذي الأساس 8 .

48 أكتب في النظام ذي الأساس 12 العدد $\overline{6175}$
المكتوب في النظام ذي الأساس 9 .

49 أكتب في النظام ذي الأساس 7 العددين $\overline{234}$
و $\overline{1040}$ المكتوبين في النظام ذي الأساس 5 .

50 a عدد طبيعي حيث $a > 1$.

أكتب الأعداد a ، a^2 و a^3 في النظام ذي الأساس a .

51 في النظام العشري ، A عدد طبيعي أكبر من 3 و S
هو مجموع أرقامه .

أثبت أن A يقبل القسمة على 3 إذا وفقط إذا كان
 S يقبل القسمة على 3 .

52 x و y عدنان طبيعيان يكتبان في النظام العشري
بنفس الأرقام ولكن في ترتيبين متعاكسين .

برهن أن الفرق $x - y$ مضاعف للعدد 9 .

53 في هذا التمرين الأعداد تكتب في النظام أساسها 4 .
(1) أملئ الجدول التالي :

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

مثلا $1+2=3$ ، $1+2=11$ ، $2+3=11$.

(2) أنجز العملية التالية $3223+132$.

54 (1) أنجز جدول الضرب في النظام ذي الأساس 4 .

(2) أنجز العملية التالية 3223×123 .

55 أنجز ، في النظام ذي الأساس 5 ، العمليات التالية .

$$\begin{array}{r} 213 \\ \times 14 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 431 \\ -132 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3421 \\ + 230 \\ \hline \end{array}$$

56 أنجز ، في النظام ذي الأساس 12 ، العمليات التالية .

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 41 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 400\alpha \\ -39\beta7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 39\beta7 \\ + 213 \\ \hline \end{array}$$

$$b = 5 \times 7^2 + 2 \times 7$$

$$c = 6 \times 7^3 + 2 \times 7 + 1$$

36 a عدد طبيعي حيث $a > 5$.

نضع : $N_a = 4a^5 + 2a^3 + a + 3$ اكتب العدد N_a في
النظام ذي الأساس a .

37 العددين $\overline{2306}$ و $\overline{1035}$ مكتوبان في النظام ذي

الأساس x .

أ - ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد x ؟

ب - أنشر العددين وفق الأساس x .

38 الأعداد المقترحة مكتوبة في النظام العشري ، أعد

كتابتها في النظام الثنائي . 2 ؛ 4 ؛ 7 و 33 .

39 يكتب العدد الطبيعي n في التعداد الثنائي $\overline{1101101}$.

ما هو أساس التعداد الذي يكتب فيه n كما يلي : $\overline{214}$ ؟

40 ما هو أساس التعداد الذي يكون فيه

$$2003 = \overline{21} \times \overline{43} \text{ ؟}$$

41 أوجد في كل حالة أساس التعداد الذي يكون فيه :

$$411 = \overline{15} \times \overline{23} \text{ ؛}$$

$$324 = \overline{21} \times \overline{14} \text{ ؛}$$

$$2888 = \overline{412} \times \overline{31} \text{ .}$$

42 أ - في أي أساس تعداد x يكون $\overline{162} = \overline{77} + \overline{63}$ ؟

ب - أحسب في النظام العشري الجداء $\overline{77} \times \overline{63}$ علما أن $\overline{63}$
و $\overline{77}$ مكتوبان في النظام ذي الأساس x المحصل عليه في
السؤال السابق .

ج - أكتب الجداء $\overline{77} \times \overline{63}$ في النظام 8 .

43 في كل حالة من الحالتين المقترحتين أدناه ، عين

الأساس a ، إن أمكن ، بحيث تكون الكتابة في النظام
ذي الأساس a .

$$12 \times 23 = \overline{276} \text{ .}$$

$$541 = \overline{22} \times \overline{32} \text{ .}$$

44 أكتب في النظام الثنائي العددين 10 و 100 المكتوبين
في النظام العشري .

45 - في أي أساس تعداد يكون $\overline{51} = \overline{13} + \overline{35}$ ؟

- أكتب المساواة السابقة في النظام الثنائي .

46 يكتب العدد n في النظام العشري 72881 .

1. الموافقات في $\mathbb{Z}$

57 أ - عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي قسمة 2^n على 10 .

ب - عين حسب قيم n ، رقم آحاد العدد 2^n .

ج - عين رقم آحاد العدد $3548^9 \times 2534^{31}$.

58 ما هما الرقمين الأخيرين للعدد 51^{2008} ؟

59 x و y عدنان صحيحان .

برهن أن $xy(x^2 - y^2)$ مضاعف للعدد 3 .

60 جد كل الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد

$(n^3 + 3n^2 + 3n - 7)$ قابلاً للقسمة على 8 .

61 أ - كيف يمكن اختيار العدد الطبيعي n حتى يكون

العدد $A = 2^n - 1$ قابلاً للقسمة على 9 .

ب - نفترض أن n يحقق الشرط المعين في السؤال

السابق ، برهن أن A يقبل القسمة على 7 . ما هو

62 باقي قسمة A على 21 ؟

عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها

يكون العدد $2^n - 5$ قابلاً للقسمة على 9 .

63 عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها

يكون 10 قاسماً للعدد $n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2$.

64 ما نلاحظه على السنة 2002 تمتاز بالخصوصية

التالية : $2002^4 + 4$ يقبل القسمة على 10 . ما هي

السنوات الأخرى التي تحقق نفس الخصوصية ؟

65 برهن أنه إذا كان العدد الطبيعي n لا يقبل القسمة على

5 فإن العدد $(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ يكون مضاعفاً للعدد 5 .

66 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

العدد $n(2n+1)(7n+1)$ يقبل القسمة على 6 .

67 n عدد طبيعي . نضع $A = n^2 - n + 1$

أ - عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة

الأقليدية للعدد A على 7 .

ب - استنتج قيم العدد الطبيعي n ، التي يكون من

أجلها العدد A قابلاً للقسمة على 7 .

ج - نضع : $B = 2753^2 - 2753 + 1$ ،

عين باقي قسمة العدد B على 7 .

68 عين جميع الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها

$(2n^3 - n^2 + 2)$ يقبل القسمة على 7 .

69 أ - عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة

الأقليدية للعدد 4^n على 7 .

ب - استنتج ، حسب قيم n ، باقي القسمة الأقليدية

للعدد $851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ على 7 .

70 أ - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي

القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 9 .

ب - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد

$7^n + 3n - 1$ قابلاً للقسمة على 9 .

71 حل في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، المعادلة

$$3x \equiv 7[8]$$

72 برهن أنه لا يوجد أي عدد صحيح x يحقق :

$$8x^2 \equiv 16[3]$$

73 أ - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي

القسمة الأقليدية على 7 للعددين 2^n و 3^n .

ب - حل في مجموعة العداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، المعادلة ذات

المجهول x التالية : $2^x + 3^x \equiv 0[7]$.

74 عين قيم العدد الطبيعي x التي من أجلها يكون

$$5^x - 3^x + 6 \equiv 0[11]$$

75 أ - عين حسب قيم العدد الطبيعي x ، القيم التي

توافق x^2 بترديد 5 .

ب - استنتج أن المعادلة $x^2 - 5y^2 = 3$ ذات المجهولين

x و y ، لا تقبل حلاً في $\mathbb{N}$.

76 x و y عدنان طبيعيان . نعتبر في مجموعة

الأعداد الطبيعية المعادلة $7x^2 + 2y^3 = 3$.

أ - أتمم الجدول التالي :

$y \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$y^3 \equiv$								[7]
$2y^3 \equiv$								[7]

ب - استنتج أنه لا توجد أي ثنائية (x, y) تحقق المعادلة

المعطاة .

77 نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية N ، المعادلة ذات المجهولين x و y التالية : $3^x = 8 + y^2$.
 (1) ناقش حسب قيم x ، بواقي قسمة 3^x على 8 .
 (2) ناقش حسب قيم y ، بواقي قسمة y^2 على 8 .
 (3) برهن أنه إذا كان x فرديا فإن المعادلة المعطاة لا تقبل حلا .

(4) نفترض أن $x = 2n$ ؛ حلل العبارة $3^{2n} - y^2$ ، ثم بين أن $3^n \leq 8$.

(5) استنتج الثنائية (x, y) التي تحقق المعادلة المعطاة .

78 ليكن p عددا طبيعيا أوليا وأكبر من أو يساوي 7 .
 نضع $n = p^4 - 1$.

(1) برهن أن p يوافق -1 أو 1 بترديد 3 . استنتج أن العدد n يقبل القسمة على 3 .

(2) أثبت أنه يوجد عدد طبيعي k حيث يكون :

$$p^2 - 1 = 4k(k+1)$$

استنتج أن العدد n يقبل القسمة على 16 .

(3) باستعمال البواقي الممكنة لقسمة العدد p على 5 ، أثبت أن 5 هو قاسم للعدد n .

79 (1) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :
 $1000n \equiv n [111]$

ب - بدون استعمال الحاسبة ، استنتج أن الأعداد المقترحة تقبل القسمة على 111 .

$$111111 ; 100010001 ; 100010000001$$

(2) أثبت أن العدد 1001001001001 يقبل القسمة على 11111 .

80 (1) في القسمة الأقليدية لـ : a على 8 الباقي هو 2 ؛
 و a على 104 الباقي هو r .
 أ - برهن أن $r \equiv 2 [8]$.
 ب - ما هي القيم الممكنة لـ r ؟

(2) في القسمة الأقليدية لـ : a على 13 الباقي هو 3 ؛
 و a على 104 الباقي هو r .
 أ - برهن أن $r \equiv 3 [13]$.
 ب - ما هي القيم الممكنة لـ r ؟

(3) في القسمة الأقليدية لـ :

أ - برهن أن $r \equiv 3 [13]$.
 ب - ما هي القيم الممكنة لـ r ؟

(3) في القسمة الأقليدية لـ :

a على 8 الباقي هو 2 ؛ a على 13 الباقي هو 3 ؛
 و a على 104 الباقي هو r .
 استنتج من (1) و (2) قيمة r .

81 بكالوريا

(1) عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n على 11 من أجل كل واحدة من القيم 1 ، 2 ، 3 ، 4 و 5 للعدد الطبيعي n .

(2) استنتج بواقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n على 11 من أجل كل عدد طبيعي n .

(3) بين أن العدد $(5^{2008} - 5^{1428})$ يقبل القسمة على 11 .

82 بكالوريا

(1) عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7 من أجل كل واحدة من القيم 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 و 6 للعدد الطبيعي n .

(2) استنتج بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7 من أجل كل عدد طبيعي n .

(3) عين باقي القسمة الأقليدية على 7 للعدد

$$(3^{1988} + 10^{1408} + 9^{3n+2})$$

83 بكالوريا

(1) عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 5 من أجل كل واحدة من القيم 1 ، 2 ، 3 و 4 للعدد الطبيعي n .

استنتج من ذلك بواقي القسمة الأقليدية على 5 للعدد 2^n ثم للعدد 3^n من أجل كل عدد طبيعي n .

(2) جد باقي القسمة على 5 للعدد 2^{14} ثم للعدد 3^{10} .

(3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد

$$(2 \times 3^{4n+1} - 2^{4n})$$

84 بكالوريا

n عدد طبيعي .

(1) أدرس تبعا لقيم العدد n بواقي قسمة العدد 5^n على 7 .

(2) عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 6^{2n} على 7 .

(3) عين قيم الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد

$$(3 + 6^{2n} + 5^n)$$

85 بكالوريا

ليكن n عددا طبيعيا .

(1) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية

2^n على 5 .

(2) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية 2^n على 7.

(3) عين قيم n التي من أجلها يكون باقي قسمة 2^n على كل من 5 و 7 هو 4.

86 عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $(n-1)$ مضاعف للعدد 3 و $[1+(n-1)2^n]$ يقبل القسمة على 7.

87 (1) عين باقي القسمة الأقليدية على 5 للعدد 2^k من أجل القيم من 1 إلى 8 للعدد الطبيعي k .

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، الباقي للقسمة الأقليدية للعدد 2^{4n} على 5 هو 1. استنتج باقي قسمة 17^{4n} على 5.

(3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3 + 17^{4n+2} + 2^{4n+3}$ يقبل القسمة على 5.

88 بكالوريا

(1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 4^n على 11.

(2) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث :

$$(7 + 26^{10n+2} + 6 \times 1995^n) \text{ يقبل القسمة على } 11.$$

89 بكالوريا

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n على 7.

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد

$$(3 + 2 \times 47^{12n+2} + 26^{6n+5}) \text{ يقبل القسمة على } 7.$$

(3) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(5n + 2 \times 47^{12n+2} + 26^{6n+5})$ يقبل القسمة على 7.

90 (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 13.

(2) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(1 - 3^{n+1}) \times 4$ مضاعفا للعدد 13.

91 عين، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الأقليدية للعدد $(1 - 16^{n+1}) \times 15$ على 7.

92 بكالوريا

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 10.

ب - استنتج باقي القسمة الأقليدية على 10 للعدد $(7^{1422} - 63 \times 9^{2001})$.

(2) أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

$$[10] \quad 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)3^{2n+1}$$

ب - عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون :

$$[10] \quad 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0$$

93 بكالوريا

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7.

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $(2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1})$ قابلا للقسمة على 7.

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$$u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$$

— أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

— ما هي قيم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها s_n قابلا للقسمة على 7 ؟

94 بكالوريا

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 10.

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k ،

$$(7^{4k+3} + 7^{4k+2} + 7^{4k+1} + 7^{4k}) \text{ يقبل القسمة على } 10.$$

(2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع :

$$S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$$

— أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+4} \equiv S_n [10]$.

— أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الأقليدية للعدد S_n على 10.

2 - أنظمة التعداد

95 x و y عدنان طبيعيان غير معدومين

أوجد الأعداد التي تكتب $\overline{yx}$ في النظام العشري، و $\overline{xy}$ في النظام ذي الأساس 7.

96 عين العدد الطبيعي n الذي يكتب $\overline{xyz} = n$ في

النظام ذي الأساس 7 و $\overline{zyx} = n$ في النظام ذي

الأساس 11.

1. a, b, c أعداد طبيعية حيث : $1 \leq a \leq b \leq c$.
 عيّن a, b, c والجداء abc علما أنّ في النظام ذي الأساس a يكون $b+c=46$ و $bc=555$.

98 (1) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) من الأعداد الطبيعية تحقق المعادلة $45x - 28y = 130$ فإن x يكون زوجي و y يكون مضاعف للعدد 5 .

(2) عيّن العدد الطبيعي n الذي يكتب $2\alpha\alpha3$ في النظام

ذي الأساس 9 ويكتب $5\beta\beta6$ في النظام ذي الأساس 7 .

99 N عدد طبيعي يكتب $xyzx$ في النظام ذي الأساس

11 ، و $yyxz$ في النظام ذي الأساس 7 .

أكتب العدد N في النظام العشري .

100 في النظام ذي الأساس 9 يكتب عدد طبيعي n كما يلي :

$$n = 1271x$$

(1) عيّن قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 8 .

(2) عيّن قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 11 .

101 عيّن عددين طبيعيين x و y بحيث يكون العدد

$$n = 27x85y$$

للقسمة على 3 وعلى 11 .

102 (1) x عدد طبيعي .

$$3x \equiv 0[7] \text{ تكافئ } x \equiv 0[7]$$

(2) ليكن N و N' عددين طبيعيين مكتوبين في النظام

العشري كما يلي :

$$N' = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1} , N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$$

برهن أن N يقبل القسمة على 7 إذا وفقط إذا كان

$$N' - 2a_0$$

(3) استعمل هذه الطريقة عدّة مرات لتبرير بدون حاسبة إن

كان العددان 105154 و 263572 يقبلان القسمة على 7 .

103 (1) ليكن N و N' عددين طبيعيين مكتوبين في

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} , N' = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}$$

$$N' = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}$$

برهن أن N يقبل القسمة على 13 إذا وفقط إذا كان

$$N' + 4a_0$$

(2) استعمل هذه الطريقة عدّة مرات لتبرير بدون حاسبة ،

إن كان العددان 1631216 و 48662029 يقبلان القسمة على 13 .

104 N عدد طبيعي يكتب في النظام العشري على

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$$

— بين أن العدد N يكون قابلا للقسمة على 11 إذا وفقط

إذا كان $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n$ مضاعفا لـ 11 .

— هل الأعداد المقترحة أدناه تقبل القسمة على 11 ؟

أ - 72792973 ؛

ب - 43141408431 ؛

ج - 531745586910 .

105 a عدد طبيعي حيث $a > 1$.

(1) أنشر الجداء التالي : $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$.

(2) استنتج أنه في كل نظام التعداد يكون العدد 10101 يقبل

القسمة على 111 ، ثم عيّن حاصل هذه القسمة .

(نمّثل $a-1$ بالرقم β)

106 (1) a عدد طبيعي حيث $a > 1$. في النظام التعداد

ذي الأساس a ، بين أن العدد 1001 يقبل القسمة على 11

(2) نمّثل $a-1$ بالرقم β ، عيّن حاصل قسمة 1001 على

11 .

(3) تحقق من ذلك في النظام ذي الأساس 10 ثم في النظام

ذي الأساس 12 .

107 (1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $a > 3$ ،

العدد 1331 المكتوب في النظام ذي الأساس a ، هو

مكعب لعدد طبيعي .

(2) عيّن الأساس النظام الذي يكون مكتوب فيه العدد

14641 ويكون القوة الرابعة لعدد طبيعي .

108 n عدد طبيعي حيث $n > 1$. نضع $a = n^2 + 1$.

(1) أكتب في النظام ذي الأساس a الأعداد التالية :

$$n^2 + 2 , n^2 + 2n , (n^2 + 2)^2 , n^4$$

— تحقق من ذلك من أجل الأساس $a = 5$ ومن أجل $a = 10$.

(2) أكتب ، في النظام ذي الأساس a الأعداد التالية :

$$x = u^2 , v = n^2(n^2 + 2) , u = n(n^2 + 2)$$

$$y = v^2$$

109 (I) ليكن N عددا طبيعيا فرديا وليس أوليا .
نفترض أن $N = a^2 - b^2$ مع a و b عددين طبيعيين و
 $a > b$.

(1) برهن أن a و b ليسا من شفعية واحدة (إذا كان أحدهما فردي فالآخر يكون زوجي)

(2) برهن أن N يكتب على شكل جداء عددين طبيعيين p و q .

(3) ما هي شفعية لكل من p و q .

(II) نقبل أن العدد 250507 ليس أوليا .

الهدف هو البحث عن الثنائيات من الأعداد الطبيعية (a, b) التي تحقق العلاقة $(E) : a^2 - 250507 = b^2$.

(1) ليكن x عددا طبيعيا .

أ- أعط في جدول ، البواقي الممكنة للعدد x بترديد 9 ؛ ثم البواقي للعدد x^2 بترديد 9 .

ب- علما أن $a^2 - 250507 = b^2$ ، عيّن البواقي الممكنة للعدد $a^2 - 250507$ بترديد 9 ؛ ثم استنتج البواقي الممكنة للعدد a^2 بترديد 9 .

ج- برهن أن الباقيان الممكنان للعدد a بترديد 9 ، هما 1 و 8 .

(2) أ- برهن أنه إذا كانت الثنائية (a, b) تحقق العلاقة (E) فإن $a \geq 501$.

ب- برهن أنه لا توجد أي ثنائية من الشكل $(501, b)$ تحقق العلاقة (E) .

(3) نفترض أن الثنائية (a, b) تحقق العلاقة (E) .

أ- برهن أن $a \equiv 503[9]$ أو $a \equiv 505[9]$.

ب- عيّن أصغر عدد طبيعي k حيث تكون الثنائية $(505 + 9k, b)$ تحقق العلاقة (E) ، ثم أعط الثنائية التي تحقق (E) .

(III) (1) استنتج مما سبق ، تحليلا إلى جداء عاملين العدد 250507 .

(2) هل العاملان أوليين فيما بينهما ؟

110 ليكن n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$ ، نريد دراسة

وجود ثلاثة أعداد طبيعية x, y, z حيث
 $x^2 + y^2 + z^2 \equiv (2^n - 1)[2^n]$

جزء I - دراسة حالتين خاصة .

(1) في هذا السؤال نفترض أن $n = 2$.

برهن أن 1 ، 3 و 5 تحقق الشرط المعطى .

(2) في هذا السؤال نفترض أن $n = 3$.

أ- ليكن m عدد طبيعي . أنقل وأتمم الجدول أدناه بالباقي

r للقسم الألفيدية للعدد m على 8 والباقي R للقسم

الألفيدية للعدد m^2 على 8 .

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

ب- هل يمكن إيجاد ثلاثة أعداد طبيعية x, y, z حيث

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7[8] ?$$

الجزء II - دراسة الحالة العامة مع $n \geq 3$.

نفترض أنه توجد ثلاثة أعداد طبيعية x, y, z حيث

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv (2^n - 1)[2^n]$$

(1) برّر أن الأعداد x, y, z كلها فردية أو من بينها عددين زوجيين فقط .

(2) نفترض أن x و y زوجيان و z فردي .

أ- برهن أن $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1[4]$.

ب- استنتج أن هناك تناقض .

(3) نفترض أن x, y, z كلها فردية .

أ- برّر أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k يكون

$$k^2 + k \equiv 0[2]$$

ب- استنتج أن $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3[8]$.

ج- استخلص .

111 عيّن رقم أحاد للجزء الصحيح للعدد الحقيقي

$$A = \frac{10^{1992}}{10^{83} + 7} \quad (\text{يمكنك استعمال المتتالية الهندسية}$$

ذات الحد الأول 1 والأساس -7×10^{-83})

اختيار من متعدد

- 112** من أجل كل عدد طبيعي n نضع $p(n) = 9^n$.
 من بين الاقتراحات المعطاة عَيِّن الاقتراح الصحيح .
 (1) أ - $p(5) \equiv 1[11]$.
 ب - $p(60) \equiv 2[11]$.
 ج - $p(2n+1) \equiv 2^{2n+1}[11]$.
 (2) نضع $N = p(3) + 3p(1) + 5$.
 أ - $N = 1035$.
 ب - $N = \overline{1035}$ في النظام ذي الأساس 9 .
 ج - $N = \overline{1000305}$ في النظام ذي الأساس 3 .
 (3) أ - $p(2n) \equiv 0[p(n)+1]$.
 ب - $p(2n) \equiv 1[p(n)+1]$.
 ج - $p(2n) \equiv 0[p(n)-1]$ مع $n \neq 0$.
113 كل سؤال يحتوي على ثلاث اقتراحات ، عين الاقتراح الصحيح .
 (1) a و b عدنان صحيحان . m و n عدنان طبيعيان حيث $nm \geq 2$. إذا كان $ab \equiv 0[nm]$ فإن :
 أ - $a \equiv 0[nm]$ و $b \equiv 0[nm]$.
 ب - $a \equiv 0[nm]$ أو $b \equiv 0[nm]$.
 ج - $ab \equiv 0[m]$ و $ab \equiv 0[n]$.
 (2) $a = 2n^2 + 4n + 16$ ؛ $b = 2n + 1$ مع $n \in \mathbb{N}$.
 أ - من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $n + 15$ هو باقي قسمة a على b .
 ب - b هو حاصل قسمة a على $n + 1$.
 ج - $a \equiv n + 15[b]$.

114 في كل سؤال يطلب تعيين الجواب الصحيح .

- (1) يكتب العدد 2008 في النظام الثنائي على الشكل :
 أ - 111101100 ؛
 ب - 11111011000 ؛
 ج - 11110010110 .
 (2) يكتب العدد 1962 في النظام الثماني على الشكل :
 أ - 3562 ؛
 ب - 2653 ؛
 ج - 3652 .
 (3) يكتب العدد 1954 في النظام السادس عشر على الشكل :
 أ - 7A2 ؛
 ب - 72A ؛
 ج - 207A .

أصحيح أم خطأ ؟

115 بكالوريا

- أنكر إن كانت الجملة التالية صحيحة أم خاطئة مبرراً الإجابة .
 (1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n} - 1$.
 (2) إذا كان x عدداً صحيحاً حلاً للمعادلة $x^2 - x \equiv 0[6]$ فإن $x \equiv 0[6]$.
 (3) إذا كان $x^2 \equiv y^2[17]$ فإن $x \equiv y[17]$.
 (4) مجموعة حلول المعادلة $12x - 5y = 3$ المعرفة في $\mathbb{Z}^2$ ، هي مجموعة الثنائيات (x, y) من الشكل $(4 + 10k ; 9 + 24k)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.
 (5) M و N عدنان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : abc و bca على الترتيب .
 إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M - N$ يقبل القسمة على 27 .

116 a و b عدنان صحيحان غير معدومين حيث :
 $a \equiv b[6]$

الجملة المقترحة من بينها الصحيحة والخاطي المطلوب تعيين الصحيحة مع التبرير وتعيين الخاطئة مع إعطاء مثال مضاد .

- أ - العدنان a و b لهما نفس الشفعية .
 ب - a و b متوافقان بالترديد 3 .
 ج - إذا كان a و b زوجيين فإنهما متوافقان بالترديد 12 .
 د - العدنان $2a$ و $2b$ متوافقان بالترديد 12 .

117 a عدد طبيعي . هل الجملة التالية صحيحة ؟

- (1) $a^4 \equiv 1[5]$ فإن $a \not\equiv 0[5]$.
 (2) $a^2 \equiv 0[25]$ أو $a^2 \equiv 1[5]$ أو $a^2 \equiv -1[5]$.
 (3) يكون العدد a قابلاً للقسمة على 25 إذا وفقط كان العدد المكتوب في النظام العشري بالرقمين الآخرين للعدد a ، يقبل القسمة على 25 .
 (4) إذا كان $a \equiv 1[5]$ مع $a \geq 2$ فإن $a! \equiv 0[5]$.

الأعداد الأولية 04

الكفاءات المستهدفة

- التعرف على أولية عدد طبيعي.
- استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين مضاعفات عدد طبيعي وقاسمه.
- استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين المضاعف المشترك والقاسم المشترك الأكبر.
- استعمال العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر.
- استعمال خواص المضاعف المشترك الأصغر.
- استعمال مبرهنة بيزو.
- استعمال مبرهنة غوص ونتائجها.

عالم الأعداد الأولية: لقد كانت الأعداد هي أول ما ظهر من علوم الرياضيات لكونها أقرب هذه العلوم إلى واقع الإنسان ، و تمتلك بعض الأعداد خصائص سحرية و غريبة جعلتها تجذب بال العلماء و الرياضيين و منها الأعداد الأولية تمتلك الأعداد الأولية خصائص فريدة من نوعها من كونها غير منتظمة وبالتالي عدم إمكانية التخمين بها ، و لكونها أصل جميع الأعداد حسب النظرية الأساسية في الحساب .

2	3	5	7		
11	13		17		19
	23				29
31			37		
41	43		47		
	53				59
61			67		
71	73				79
	83				89
			97		

أعداد ميرسين الأولية: يتكرر هذا الاسم كثيرا في عالم الأعداد الأولية ، و هي الأعداد من الشكل: $2^n - 1$ ، ولعل الذي جذب الأنظار إلى هذه الأعداد هو سهولة التحقق من أوليتها في الحواسيب الثنائية ، لذلك أكبر الأعداد الأولية المعروفة حاليا من هذه الصورة من الأعداد .

لقد كان عدد من الرياضيين السابقين يعتقدون أن العدد من الصورة $2^n - 1$ يكون أوليا كلما كان n عددا أوليا ، و لكن في 1536 أثبت ريجيوس (Regius) أن العدد : $23.89 = 2047$ ليس أوليا حيث أنه حاصل ضرب 23×89 ، و في عام 1603 تحقق كاتالدي (Cataldi) أن العددين $2^{17} - 1$ و $2^{19} - 1$ أوليان ، و استنتج كاتالدي و بشكل خاطئ أن العدد $2^n - 1$ يكون أوليا لكل : $n = 2, 3, 29, 31, 37$ ، حيث أثبت فيرمات في 1645 أن كاتالدي كان خاطئا بالنسبة للعددين $n = 23, 37$ ، و أثبت أولر في 1738 أن كاتالدي كان أيضا خاطئا بالنسبة للعدد $n = 29$ ، و في وقت لاحق أثبت أولر أن كاتالدي كان مصيبا بالنسبة للعدد $n = 31$.
 بمجيء الفرنسي مارين ميرسين (Marin Mersenne) 1588-1648 ، حيث وضع في مقدمة أحد كتبه أن العدد $2^n - 1$ يكون أوليا عندما : $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ ، و أنه مركبا لكل الأعداد $n < 257$ الصحيحة ، و رغم أن هذا التخمين من ميرسين كان خاطئا إلا أن اسمه ظل ملتصقا بهذه الأعداد حيث سميت باسمه

نشاط أول

يستعمل أحمد سيارته كل يوم للالتحاق بعمله وهو محترم لقانون السيادة . في الطريق المؤدي إلى مكان عمله يؤخره ضوءان ثلاثيا الألوان ينظمان السير غير متزامنين بانتظام ، المسافة بينهما $875m$. بعد دراسة معمقة لاستغلال هذه الأضواء تبين له أن الضوء الأول يبقى أخضر مدة $50s$ و يبقى أحمر مدة $40s$. الضوء الثاني يبقى أخضر مدة $40s$ و يبقى أحمر $55s$. الضوءان ينتقلان للأخضر في آن واحد في منتصف الليل (نأخذ المبدأ منتصف الليل) . السرعة المتوسطة للسيارة بين الضوعين تقدر بـ $45km/h$. الضوء الأصفر يعتبر أحمر .



- (1) ما هي اللحظات بالثانية التي يمر فيها الضوء الأول إلى الأخضر؟
 - (2) ما هي اللحظات بالثانية التي يمر فيها الضوء الثاني إلى الأخضر؟
 - (3) عيّن المجموعة M_{90} مجموعة مضاعفات العدد 90 الأصغر من 86400 .
 - (4) عيّن المجموعة M_{95} مجموعة مضاعفات العدد 95 الأصغر من 86400 .
 - (5) عيّن $M_{90} \cap M_{95}$.
 - (6) ما هي اللحظات بالثانية التي يمر فيها الضوءان إلى الأخضر في آن واحد ؟
 - (7) ما هي أصغر لحظة غير معدومة بالثانية التي يمر فيها الضوءان إلى الأخضر في آن واحد ؟
 - (8) يريد السائق المرور بالضوعين بين الساعة السابعة والساعة السابعة والنصف ما هي اللحظة التي يمكن اقتراحها له حيث يمر فيها الضوءان إلى الأخضر في آن واحد ؟
 - (9) يريد السائق معرفة اللحظات t التي يمر فيها الضوء الأول إلى الأخضر و يمر الضوء الثاني إلى الأخضر إلا عندما يصل إليه .
- (a) ليكن u و v أعداد مرور الضوء الأول والضوء الثاني إلى الأخضر بين منتصف الليل وإحدى اللحظات t على الترتيب . عيّن t بدلالة u .
- (b) أثبت أن $t + 70 = 95(v + 1)$.
- (c) أثبت أن u و v يحققان المعادلة $18u - 19v = 5$.
- (d) أثبت أن $18(u + 5) = 19(v + 5)$.
- (e) استنتج u و v ثم استنتج t (يمكن الاستعانة بتحليل 18 و 19 إلى جداء عوامل أولية) .
- (f) ما هي ساعة المرور التي يمكن اقتراحها على السائق ؟ (بين الساعة 7 و الساعة 7 و النصف)

التشفير التآلفي يعتمد على ترقيم كل حرف من الحروف الأبجدية بعدد x ، ثم تعويض هذا العدد x المرفق بحرفه بالعدد y حيث $y \equiv ax + b [28]$ حيث a و b عدنان طبيعيان و $0 \leq y \leq 27$

1. مثال: نأخذ $a = 3$ و $b = 7$.

الحرف	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي	ك	ل	م	ن
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	7	10	13	16	19	22	25	0	3	6	9	12	15	18
التشفير	ح	ك	ن	ف	ر	ث	ض	أ	د	ز	ي	م	ع	ق

الحرف	س	ع	ف	ص	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
x	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
y	21	24	27	2	5	8	11	14	17	20	23	26	1	4
التشفير	ت	ذ	غ	ج	و	ط	ل	س	ص	ش	خ	ظ	ب	هـ

(1) ما هي الكلمة التي تشفيرها " كحي " .

(2) عين تشفيرا للعبارة " خمسة جويلية عيد الاستقلال "

(3) أثبت أن: إذا كان x و x' عددين طبيعيين حيث $0 \leq x \leq 27$ و $0 \leq x' \leq 27$ و كان: $3x + 7 \equiv 3x' + 7 [28]$ فإن $x = x'$.

(4) ليكن التشفير التآلفي المعروف بـ : $y \equiv 4x + 5 [28]$ و $0 \leq y \leq 27$ ، أذكر حرفين لهما نفس التشفير .

2. الحالة العامة:

ليكن التشفير التآلفي المعروف بـ : $y \equiv ax + b [28]$ حيث a و b عدنان طبيعيان و $0 \leq x \leq 27$ و $0 \leq y \leq 27$.

(1) أثبت أنه إذا كان a أوليا مع 28 فإن حرفين مختلفين من الحروف الأبجدية يشفران بحرفين مختلفين .

أي إذا كان x و x' عددين طبيعيين حيث $0 \leq x \leq 27$ و $0 \leq x' \leq 27$ و كان $ax + b \equiv ax' + b [28]$ فإن $x = x'$.

(2) نفرض a غير أولي مع 28 و نضع $PGCD(a; 28) = d$.

ليكن العدد k حيث $kd = 28$. وليكن a الحرف الذي رتبته k . أثبت أن الحرفين a و a لهما نفس التشفير .

3. تطبيق:

(1) في التشفير التآلفي المعروف بـ : $y \equiv 13x + 7 [28]$ و $0 \leq y \leq 27$ ، نريد معرفة الحرف الذي تشفيره الحرف a الذي رتبته $y = 17$.

أثبت أن الحرف الذي رتبته x المناسب لـ a يحقق المعادلة $28k - 13x = 18$. مع $0 \leq x \leq 27$ و حيث k عدد طبيعي .

(2) حل المعادلة $28k - 13x = 18$ ، عين الحرف الذي تشفيره الحرف a .

١. الأعداد الأولية .

1. تعريف .

تعريف: القول أن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$: 1 و n نفسه .

ملاحظات و نتائج: • 0 غير أولي لأنه يقبل ما لانهاية من القواسم .

• 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو 1 .

• 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد .

• 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 هي الأعداد الأولية الأصغر من 25 .

2. خواص .

خاصية 1: كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 ($n \geq 2$) يقبل على الأقل قاسما أوليا .

البرهان: ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 .

• إذا كان n أوليا فإن n يقسم n والخاصية محققة .

• إذا كان n غير أولي فإن n يقبل على الأقل قاسما يختلف عن 1 وعن n . ليكن p أصغر قاسم للعدد n

يختلف عن 1 وعن n . نفرض p غير أولي و منه يوجد عدد طبيعي d يقسم p حيث $1 < d < p$. و بالتالي d

يقسم n وهذا تناقض (لأن $d < p$ و p أصغر قاسم للعدد n) و منه p عدد أولي والخاصية محققة .

خاصية 2: كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 ($n \geq 2$) يقبل قاسما أوليا a حيث $a \leq \sqrt{n}$.

البرهان: ليكن n عددا طبيعيا غير أولي أكبر تماما من 1 .

n يقبل قاسما d يختلف عن 1 وعن n و منه $n = d \times d'$ حيث d' عدد طبيعي غير معدوم .

$d' \geq 2$ (لأن إذا كان $d' = 1$ فإن $d = n$ و هذا تناقض)

نفرض $d \leq d'$ و منه $d^2 \leq d \times d' = n$ أي $d^2 \leq n$ و بالتالي $d \leq \sqrt{n}$.

من الخاصية 1: d يقبل على الأقل قاسما أوليا a وهو كذلك قاسم أولي للعدد n .

بما أن لدينا $a \leq d$ و $d \leq \sqrt{n}$ نستنتج أن $a \leq \sqrt{n}$.

خاصية 3: مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

البرهان: نستعمل البرهان بالخلف .

نفرض أن مجموعة الأعداد الأولية منتهية . ليكن p أكبر عدد من مجموعة الأعداد الأولية .

نسمي N جداء كل الأعداد الأولية من 2 إلى p .

$$N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times p$$

ليكن N' العدد الطبيعي حيث أن $N' = N + 1$. باقي قسمة N' على 2 ، 3 ، 5 ، ... أو p تعطي

الباقي دوما 1 . إذن N' غير قابل للقسمة على 2 ، 3 ، 5 ، ... أو p .

إذا كان N' أوليا فإن $N' > p$ و هذا تناقض . إذا كان N' غير أولي فإن N' يقبل قاسما أوليا أكبر

من p (الخاصية 1) و هذا تناقض .

إذن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

تمرين محلول 1: في كل حالة من الحالات الآتية أذكر إن كان العدد أوليا أم لا .

(1) 349 ؛ (2) 341 ؛ (3) 841

طريقة: لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 ($n \geq 2$) أوليا أم لا . نحسب $\sqrt{n}$.

- إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي .
- إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب .
- * إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف ونقرّ أن n غير أولي .
- * إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقرّ أن n أولي .

الحل:

(1) $\sqrt{349} \approx 18,68$ الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{349}$ هي 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17 .

349 لا يقبل القسمة على 2، 3، 5 ثم $349 = 7 \times 49 + 6$ و $349 = 11 \times 31 + 8$

و $349 = 13 \times 26 + 11$ و $349 = 17 \times 20 + 9$

إذن 349 لا يقبل القسمة على 7، 11، 13 و 17 و منه 349 عدد أولي .

(2) $\sqrt{341} \approx 18,46$ الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{341}$ هي 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17 .

341 لا يقبل القسمة على 2، 3، 5 ثم $341 = 7 \times 48 + 5$ و $341 = 11 \times 31$

إذن 341 يقبل القسمة على 11 و منه 341 غير أولي .

(3) $\sqrt{841} = 29$ بما أن $\sqrt{841}$ عدد طبيعي فإن 841 غير أولي .

تمرين محلول 2: n عدد طبيعي أكبر تماما من 3 :

ليكن العدد الطبيعي $a = n^2 - 2n - 8$

هل توجد قيم للعدد n يكون من أجلها a عددا أوليا ؟

طريقة: للبرهان على أن عدد طبيعي $a \geq 4$ غير أولي ، يكفي كتابته على الشكل $a = p \times q$ حيث p و q

عددان طبيعيان أكبر تماما من 1 .

الحل:

a ينعدم من أجل -2 و 4 .

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ لدينا $a = (n+2)(n-4)$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $n+2 \geq 2$. ثم من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 5 ، $n-4 \geq 2$.

إذن من أجل $n \geq 6$: a هو جداء العددين $(n+2)$ و $(n-4)$ الأكبر تماما من 1 و منه a غير أولي .

تبقى دراسة الحالتين $n=4$ و $n=5$.

• إذا كان $n=4$ ، فإن $a=0$ و منه a غير أولي .

• إذا كان $n=5$ ، فإن $a=7$ و منه a عدد أولي .

إذن a عدد أولي إذا و فقط إذا كان $a=7$

2. تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية.

مبرهنة: كل عدد طبيعي غير أولي n حيث $n \geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية .

البرهان: ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 .

n غير أولي فإن n يقبل القسمة على عدد أولي p_1 ($p_1 \geq 2$) على الأقل و منه :

$$n = p_1 \times n_1 \text{ حيث } 1 < n_1 < n$$

• إذا كان n_1 أوليا فإن المبرهنة محققة.

• إذا كان n_1 غير أولي فإن n_1 يقبل القسمة على عدد أولي p_2 ($p_2 \geq 2$) على الأقل و منه :

$$n_1 = p_2 \times n_2 \text{ حيث } 1 < n_2 < n_1 \text{ و منه } n = p_1 \times p_2 \times n_2$$

نواصل العملية بنفس الطريقة حتى الحصول على $n_i = 1$ (i عدد طبيعي) .

الأعداد $n_1, n_2, \dots, n_i$ متتالية متناقصة من أعداد طبيعية .

ونحصل على $n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k$ (k عدد طبيعي) و هو تحليل n إلى جداء عوامل أولية .

يمكن للأعداد $p_1, p_2, \dots, p_k$ أن تتكرر في التحليل .

$$\text{و عليه نحصل على } n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times \dots \times p_k^{d_k}$$

حيث $d_1, d_2, \dots, d_k$ أعداد طبيعية . نقول أن n محلل إلى جداء عوامل أولية .

ملاحظة: نقبل بدون برهان أن كل عدد طبيعي n يقبل تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية .

خاصية: a و b عدنان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1 .

يكون العدد b قاسما للعدد a إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجودا في تحليل a و بأس إما

مساو و إما أصغر من أسه في تحليل a .

البرهان: n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 تحليله إلى جداء عوامل أولية $n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times \dots \times p_k^{d_k}$

• إذا كان l قاسما للعدد n فإن $n = l \times l'$ حيث l' عدد طبيعي. إذن كل قاسم أولي للعدد l هو قاسم أولي للعدد n

و بالتالي لا يوجد أي قاسم أولي للعدد l يختلف عن العوامل الأولية الموجودة في تحليل n ، و كل عامل أولي في

تحليل l موجود في تحليل n بأس إما مساو و إما أصغر من أسه في تحليل n .

إذن قواسم العدد n هي الأعداد الطبيعية من الشكل $p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times \dots \times p_k^{d'_k}$ حيث :

$$0 \leq d'_1 \leq d_1 \text{ ، } 0 \leq d'_2 \leq d_2 \text{ ، } \dots \text{ ، } 0 \leq d'_k \leq d_k$$

• عكسيا ليكن l عددا طبيعيا مكتوبا على الشكل $p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times \dots \times p_k^{d'_k}$.

$$\text{يمكننا أن نكتب } n = l \left(p_1^{d_1 - d'_1} \times p_2^{d_2 - d'_2} \times \dots \times p_k^{d_k - d'_k} \right)$$

$$\text{لأن } \left(p_1^{d_1 - d'_1} \times p_2^{d_2 - d'_2} \times \dots \times p_k^{d_k - d'_k} \right) \left(p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times \dots \times p_k^{d'_k} \right) = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times \dots \times p_k^{d_k}$$

و منه l يقسم n .

تمرين محلول: (1) حلل العدد 9604 إلى جداء عوامل أولية .

(2) عين مجموعة قواسم العدد 9604 .

طريقة: لإيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a نحلل a إلى جداء عوامل أولية . إلى كل أس في التحليل نضيف 1 ثم

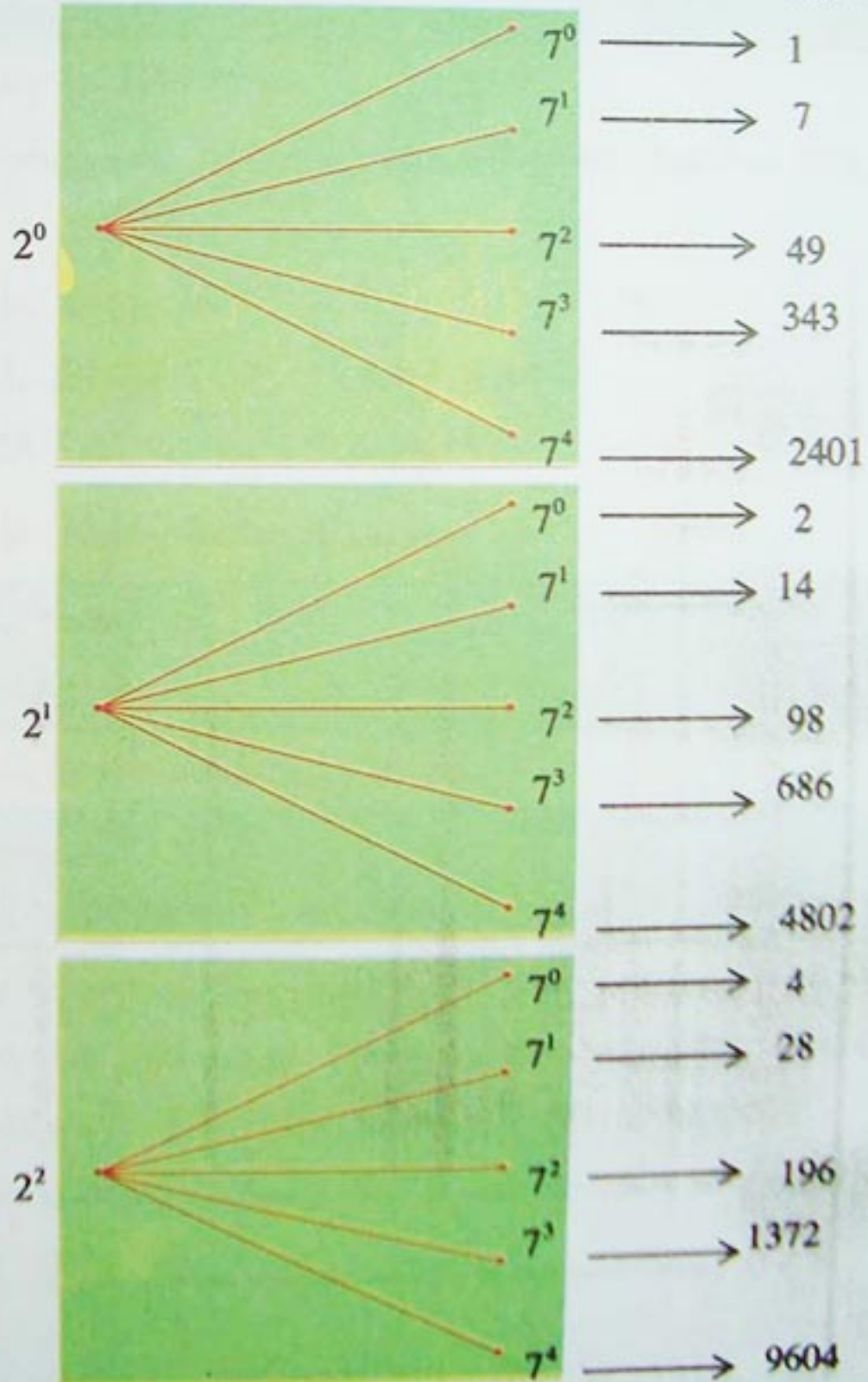
نحسب جداء الأعداد المحصل عليها .

الحل: (1) $9604 = 2^2 \times 7^4$

العدد 9604 يقبل 15 قاسم .

9604	2
4802	2
2401	7
343	7
49	7
7	7
1	

(2) لتكن D_{9604} مجموعة قواسم 9604 . لإيجاد المجموعة D_{9604} يمكن استعمال الشجرة الآتية .



$$D_{9604} = \{1; 2; 4; 7; 14; 28; 49; 98; 196; 343; 686; 1372; 2401; 4802; 9604\}$$

١. المضاعف المشترك الأصغر لعددين.

a عدد طبيعي غير معدوم . نرسم M_a إلى مجموعة مضاعفات العدد a .

مثال: مجموعة مضاعفات 6 هي $M_6 = \{0; 6; 12; 18; 24; \dots\}$

ملاحظة: المضاعف الوحيد لـ 0 هو 0 .

١. تعريف

تعريف: a و b عددين طبيعيين غير معدومين . M_a مجموعة مضاعفات a ، M_b مجموعة مضاعفات b .

$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b

يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .

و نرسم له $PPCM(a; b)$.

ملاحظات: $PPCM(a; a) = a$ و $PPCM(1; a) = a$

مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة المضاعفات المشترك الأصغر لهما .

مثال: مجموعة مضاعفات 6 هي $M_6 = \{0; 6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; \dots\}$

مجموعة مضاعفات 8 هي $M_8 = \{0; 8; 16; 24; 32; 40; 48; \dots\}$

$PPCM(6; 8) = 24$ إذن $M_6 \cap M_8 = \{24; 48; 72; 96; \dots\}$

2. تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين

تعريف: a و b عددين صحيحان غير معدومين .

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث $m = PPCM(|a|; |b|)$

3. خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين

خاصية: a و b عددين طبيعيين غير معدومين . k عدد صحيح غير معدوم .

$$PPCM(ka; kb) = |k| PPCM(a; b)$$

البرهان: a و b عددين صحيحان غير معدومين . نضع $m = PPCM(a; b)$. و منه يوجد عددين صحيحان

p و p' حيث $m = p \times a$ و $m = p' \times b$ و منه $km = kp \times a$ و $km = kp' \times b$ و بالتالي $|k|m$ مضاعف

مشترك موجب تماماً للعددين ka و kb و منه: $PPCM(ka; kb) \leq |k| PPCM(a; b) \dots (1)$

نضع $M = PPCM(ka; kb)$ و منه يوجد عددين صحيحين d و d' حيث $M = dk \times a$ و $M = d'k \times b$

و منه a يقسم $\frac{M}{k}$ و b يقسم $\frac{M}{k}$. و منه $\frac{M}{|k|}$ هو مضاعف مشترك موجب تماماً للعددين a و b

و بالتالي $PPCM(a; b) \leq \frac{M}{|k|}$. و منه: $|k| PPCM(a; b) \leq PPCM(ka; kb) \dots (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن $PPCM(ka; kb) = |k| PPCM(a; b)$

تمرين محلول 1: عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين 12 و 18 .

الحل:

نسمي M_{12} مجموعة مضاعفات 12 و M_{18} مجموعة مضاعفات 18 . المجموعتان غير منتهيتين .
 $M_{12} = \{0; 12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; \dots\}$ و $M_{18} = \{0; 18; 36; 54; 72; 90; 108; 126; 144; \dots\}$.
 $M_{12} \cap M_{18} = \{0; 36; 72; 108; 144; 180; \dots\}$ ، أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_{12} \cap M_{18}$ هو 36
 إذن $PPCM(12; 18) = 36$.

تمرين محلول 2: عين العدد الطبيعي غير المعدوم a حيث $PPCM(56; a) = 280$.

الحل:

$56 = 2^3 \times 7$ و $280 = 2^3 \times 5 \times 7$.
 بما أن $PPCM(56; a) = 280$ فإن a يقسم 280 .
 إذن تحليل a إلى جداء عوامل أولية من الشكل : $2^a \times 5^b \times 7^c$ حيث $0 \leq a \leq 3$ ، $0 \leq b \leq 1$ ، $0 \leq c \leq 1$.
 زيادة على هذا a لا يقسم 56 و إلا $PPCM(56; a) = 56$. ومنه $b = 1$.
 إذن القيم الممكنة للعدد a هي :

$a = 2^1 \times 5 \times 7^0 = 10$	؛	$a = 2^0 \times 5 \times 7^0 = 5$
$a = 2^1 \times 5 \times 7^1 = 70$	؛	$a = 2^0 \times 5 \times 7^1 = 35$
$a = 2^2 \times 5 \times 7^0 = 20$	؛	$a = 2^2 \times 5 \times 7^1 = 140$
$a = 2^3 \times 5 \times 7^1 = 280$	؛	$a = 2^3 \times 5 \times 7^0 = 40$

تمرين محلول 3: n عدد طبيعي غير معدوم .

a و b عددان طبيعيان حيث أن :

$$a = 3^n (11^{n+2} - 11^n) \text{ و } b = 11^n (3^{n+1} - 3^n)$$

عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .

الحل:

$$\begin{aligned} a &= 3^n \times 11^n \times (11^2 - 1) = 3^n \times 11^n \times 120 \\ b &= 11^n \times 3^n \times (3 - 1) = 3^n \times 11^n \times 2 \\ PPCM(a; b) &= PPCM(3^n \times 11^n \times 120; 3^n \times 11^n \times 2) \\ \therefore PPCM(a; b) &= 3^n \times 11^n \times PPCM(120; 2) \\ PPCM(120; 2) &= 120 \text{ و } \\ \text{إذن } PPCM(a; b) &= 3^n \times 11^n \times 120 \\ \text{أي } PPCM(a; b) &= 2^3 \times 3^{n+1} \times 5 \times 11^n \end{aligned}$$

4. حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية.

خاصية: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماماً من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأصغر أس.

البرهان: a و b عدنان طبيعيين أكبر من 1. $p_1, p_2, \dots, p_n$ الأعداد الأولية الموجودة في تحليل a أو في

تحليل b . نضع $a = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_n^{a_n}$ و $b = p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times \dots \times p_n^{b_n}$

حيث $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ أعداد طبيعية.

كل قاسم مشترك d للعددين a و b له تحليل على الشكل: $d = p_1^{g_1} \times p_2^{g_2} \times \dots \times p_n^{g_n}$

حيث $g_1, g_2, \dots, g_n$ أعداد طبيعية و $0 \leq g_1 \leq a_1$ و $0 \leq g_1 \leq b_1$

إذا كان d_1 الأصغر من بين a_1 و b_1 فإن $0 \leq g_1 \leq d_1$ بنفس الطريقة $0 \leq g_2 \leq d_2, \dots, 0 \leq g_n \leq d_n$

d_2 الأصغر من بين a_2 و $b_2, \dots, d_n$ الأصغر من بين a_n و b_n

يكون d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا كان $g_1 = d_1, g_2 = d_2, \dots, g_n = d_n$

إذن $PGCD(a; b) = p_1^{g_1} \times p_2^{g_2} \times \dots \times p_n^{g_n}$

5. حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية.

خاصية: المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماماً من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأكبر أس.

البرهان: a و b عدنان طبيعيين كلاهما أكبر من 1. $p_1, p_2, \dots, p_n$ الأعداد الأولية الموجودة في تحليل a أو في

أو في تحليل b . نضع $a = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_n^{a_n}$ و $b = p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times \dots \times p_n^{b_n}$

حيث $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ أعداد طبيعية.

كل مضاعف مشترك m للعددين a و b له تحليل على الشكل: $m = p_1^{l_1} \times p_2^{l_2} \times \dots \times p_n^{l_n}$

حيث $l_1, l_2, \dots, l_n$ أعداد طبيعية و $0 \leq a_1 \leq l_1$ و $0 \leq b_1 \leq l_1$

إذا كان w_1 الأكبر من بين a_1 و b_1 فإن $0 \leq w_1 \leq l_1$ بنفس الطريقة $0 \leq w_2 \leq l_2, \dots, 0 \leq w_n \leq l_n$

w_2 الأكبر من بين a_2 و $b_2, \dots, w_n$ الأكبر من بين a_n و b_n

يكون m هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b إذا كان $l_1 = w_1, l_2 = w_2, \dots, l_n = w_n$

إذن $PPCM(a; b) = p_1^{l_1} \times p_2^{l_2} \times \dots \times p_n^{l_n}$

6. العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

خاصية: جداء عددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماماً من 1 مساو لجداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما

المشترك الأصغر. بعبارة أخرى $PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = a \times b$

البرهان: باستعمال نفس الترميز السابق $PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = p_1^{g_1+l_1} \times p_2^{g_2+l_2} \times \dots \times p_n^{g_n+l_n}$

و بما أن g_n هو الأصغر من بين a_n و b_n و l_n هو الأكبر من بين a_n و b_n فإن $g_n + l_n = a_n + b_n$

ومن ثم $PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = p_1^{a_1+b_1} \times p_2^{a_2+b_2} \times \dots \times p_n^{a_n+b_n}$

$= a \times b$

تمرين محلول 1: باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية عين القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر للعددين 5600 و 28800 .

الحل:

نحلل العددين 5600 و 28800 إلى جداء عوامل أولية .

$$5600 = 2^5 \times 5^2 \times 7$$

$$28800 = 2^7 \times 3^2 \times 5^2$$

$$PGCD(5600; 28800) = 2^5 \times 5^2 = 800$$

$$PPCM(5600; 28800) = 2^7 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 201600$$

تمرين محلول 2: باستعمال العلاقة بين القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للعددين 4530 و 480 عين المضاعف المشترك الأصغر لهما.

الحل:

باستعمال خوارزمية إقليدس نجد $PGCD(4530; 480) = 30$

$$PPCM(4530; 480) \times PGCD(4530; 480) = 4530 \times 480$$

$$PPCM(4530; 480) = \frac{4530 \times 480}{PGCD(4530; 480)} \quad \text{منه}$$

$$PPCM(4530; 480) = \frac{2174400}{30} = 72480$$

تمرين محلول 3: عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية حلول الجملة :

$$\begin{cases} a \times b = 18000 \\ PPCM(a; b) = 600 \end{cases}$$

الحل:

نسمي d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

نضع $a = d \times a'$ و $b = d \times b'$ حيث a' و b' عددان طبيعيين أوليان فيما بينهما .

و نعلم أن $PPCM(a; b) \times PGCD(a; b) = a \times b$. إذن $600 \times d = 18000$ و منه $d = 30$.
الجملة تكتب :

$$\begin{cases} d^2 a' \times b' = 18000 \\ d \times a' \times b' = 600 \end{cases}$$

و نستنتج أن $a' \times b' = 20$ وبالتالي $(a' = 1 \text{ و } b' = 20)$ أو $(a' = 4 \text{ و } b' = 5)$ أو $(a' = 5 \text{ و } b' = 4)$ أو $(a' = 20 \text{ و } b' = 1)$.

الحلول هي الثنائيات

$$(a; b) = (30; 600) , (a; b) = (120; 150) , (a; b) = (150; 120) , (a; b) = (600; 30)$$

مبرهنة بيزو

مبرهنة: يكون عدنان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عدنان صحيحان u و v حيث :

$$au + bv = 1$$

البرهان: نفرض أن a و b عدنان صحيحان أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a; b) = 1$ ومنه أحد العددين a أو b

غير معدوم . نضع a غير معدوم .

لتكن E مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $au + bv$ حيث u و v عدنان صحيحان . المجموعة E غير خالية لأن a عنصر منها (بأخذ $u = 1$ و $v = 0$) كذلك $-a$ عنصر من E (بأخذ $u = -1$ و $v = 0$) . أحد العددين a أو $-a$ موجب تماما . إذن المجموعة E تحتوي على عدد موجب تماما على الأقل . ليكن m أصغر هذه الأعداد الموجبة تماما ؛ يوجد إذن عدنان صحيحان u_0 و v_0 حيث أن $m = au_0 + bv_0$.

القسمة الإقليدية للعدد a على m تكتب $a = mq + r$ حيث q و r عدنان طبيعيين و $0 \leq r < m$.

ومنه : $r = a - mq$ و بالتالي $r = a - (au_0 + bv_0)q = a(1 - qu_0) + b(-qv_0)$ و منه r عنصر من المجموعة E (بأخذ $u = 1 - qu_0$ و $v = -qv_0$) بما أن m أصغر عنصر موجب تماما من E و $0 \leq r < m$ فإن $r = 0$ و منه $a = mq$ و بالتالي m يقسم a . بنفس الطريقة نثبت أن m يقسم b .

إذن $m = 1$ لأن a و b عدنان صحيحان أوليان فيما بينهما . وهذا يعني وجود u_0 و v_0 حيث $au_0 + bv_0 = 1$.

عكسيا : نفرض $au + bv = 1$ (أعداد صحيحة) نضع $d = PGCD(a; b)$.

d يقسم a و b و منه d يقسم $au + bv$ و بالتالي d يقسم 1 أي $d = 1$ ، و منه a و b أوليان فيما بينهما .

ملاحظة: الثنائية $(u; v)$ ليست وحيدة . مثلا من أجل $a = 3$ و $b = 2$ ، $1 \times 3 - 1 \times 2 = 1$ و $-1 \times 3 + 2 \times 2 = 1$.

خواص

خاصية 1: إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عدنان صحيحان u و v حيث :

$$au + bv = d$$

البرهان: a و b عدنان صحيحان غير معدومين و ليكن d قاسمهما المشترك الأكبر . نضع $a = da'$ و $b = db'$

حيث a' و b' عدنان صحيحان أوليان فيما بينهما . و منه وحسب مبرهنة بيزو يوجد عدنان صحيحان u و v حيث $a'u + b'v = 1$. بضرب الطرفين في d ، نحصل على : $da'u + db'v = d$ أي $au + bv = d$ وهو المطلوب .

خاصية 2: إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها .

البرهان: ليكن p عددا أوليا و a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p ، نضع $PGCD(a; p) = d$. بما أن p أولي

فإن $d = 1$ أو $d = p$ و d لا يقسم a إذن $d = 1$ ، و منه p أولي مع a .

خاصية 3: إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b \times c$.

البرهان: ليكن a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c ، إذن حسب مبرهنة بيزو توجد أعداد صحيحة .

u, v, u', v' حيث : $au + bv = 1$ و $au' + cv' = 1$. نضرب طرفا بطرف نحصل على :

$$a^2uu' + acuv' + abu'v + bcvv' = 1$$

و منه و حسب مبرهنة بيزو a و bc أوليان فيما بينهما .

تمرين محلول 1: ليكن n عددا طبيعيا .

أثبت أن العددين $A = 4n - 3$ و $B = 5n - 4$ عددان أوليان فيما بينهما .

طريقة: للبرهان على أن العددين A و B عددان أوليان فيما بينهما يمكن استعمال مبرهنة بيزو .

الحل:



إيتيان بيزو (1730-1783)

نحسب العدد $5A - 4B$.

$$5A - 4B = 5(4n - 3) - 4(5n - 4)$$

$$5A - 4B = 20n - 15 - 20n + 16$$

$$5A - 4B = 1$$

ومنه وحسب مبرهنة بيزو A و B عددان أوليان فيما بينهما .

تمرين محلول 2: عين عددين صحيحين u و v حيث أن $135u + 55v = 5$.

الحل:

$$135 = 55 \times 2 + 25 \quad , \quad 55 = 25 \times 2 + 5 \quad , \quad 25 = 5 \times 5$$

$$\text{إذن } PGCD(135; 55) = 5$$

$$5 = 55 - 25 \times 2$$

$$25 = 135 - 55 \times 2$$

$$5 = 55 - (135 - 55 \times 2) \times 2$$

$$5 = 135 \times (-2) + 55 \times 5 \quad , \quad \text{منه } u = -2 \text{ و } v = 5$$

تمرين محلول 3: ليكن n عددا صحيحا .

(1) أثبت أن $n+1$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما .

(2) أثبت أن $n+1$ و $3n+4$ أوليان فيما بينهما .

(3) استنتج أن $n+1$ و $6n^2 + 17n + 12$ أوليان فيما بينهما .

الحل:

(1) نلاحظ أن :

$$(2n+3) - 2(n+1) = 1 \quad \text{إذن وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين } 2n+3 \text{ و } n+1 \text{ أوليان فيما بينهما .}$$

(2) نلاحظ أن :

$$(3n+4) - 3(n+1) = 1 \quad \text{إذن وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين } 3n+4 \text{ و } n+1 \text{ أوليان فيما بينهما .}$$

(3) نلاحظ أن :

$$(2n+3)(3n+4) = 6n^2 + 17n + 12$$

بما أن $n+1$ أولي مع كل من $2n+3$ و $3n+4$ فإن $n+1$ أولي مع جدائهما $6n^2 + 17n + 12$

و هذا حسب الخاصية 3 .

ل. مبرهنة غوص .

مبرهنة: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c .

البرهان: لنكن a و b عددين صحيحين غير معدومين أوليين فيما بينهما . إذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عدنان

u و v حيث : $au + bv = 1$.

لنكن c عددا صحيحا غير معدوم حيث a يقسم الجداء bc .

نضرب طرفي المساواة $au + bv = 1$ في c ، نحصل على $cau + cbv = c$.

من المعطيات a يقسم الجداء bc و منه a يقسم الجداء bcv و بما أن a يقسم الجداء acu فإن a يقسم

$acu + bcv$ أي a يقسم c .

خواص .

خاصية 1: a و b عدنان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي .

إذا كان p يقسم الجداء ab ، فإن p يقسم a أو p يقسم b .

البرهان: a و b عدنان طبيعيان غير معدومين و ليكن p عددا أوليا . حيث p يقسم الجداء ab .

• إذا كان p يقسم a الخاصية محققة .

• إذا كان p لا يقسم a فإن $PGCD(a; p) = 1$ لأن p عدد أولي وقاسميه هما 1 و p .

إذن a و p أوليان فيما بينهما .

و بما أن p يقسم الجداء ab و هو أولي مع a و حسب مبرهنة غوص فإن p يقسم b .

و منه صحة الخاصية .

خاصية 2: a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة .

إذا كان a مضاعفا للعددين b و c و كان c و b أوليين فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc .

البرهان: لنكن a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة . حيث a مضاعف للعددين b و c .

a مضاعف للعدد b إذن يوجد عدد طبيعي d حيث $a = db$.

a مضاعف للعدد c إذن يوجد عدد طبيعي d' حيث $a = d'c$.

إذن $db = d'c$.

c يقسم $d'c$ و منه c يقسم db . بما أن c أولي مع b و حسب مبرهنة غوص فإن c يقسم d . إذن يوجد عدد

عدد طبيعي d'' حيث $d = d''c$.

نعوض في $a = db$ نحصل على $a = d''cb$ و منه a مضاعف للعدد bc .

و منه صحة الخاصية .

مثال: العدد 116916 مضاعف لـ 3 لأن $(1 + 1 + 6 + 9 + 1 + 6 = 24)$ و 24 مضاعف لـ 3 .

العدد 116916 مضاعف لـ 4 لأن (16 العدد المكون من الأحاد و العشرات يقبل القسمة على 4)

بما أن 3 و 4 أوليين فيما بينهما فإن 116916 مضاعف لـ 3×4 أي مضاعف لـ 12 .

- تمرين محلول 1:** (1) عین فی المجموعة $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $(x; y) : 9x - 16y = 0$.
- (2) تأكد أن الثنائية $(4; 2)$ حل للمعادلة ذات المجهول $(x; y) : 9x - 16y = 4$.
- (3) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $(x; y) : 9x - 16y = 4$.



الحل:

$$(1) \quad 9x - 16y = 0 \text{ و منه } 9x = 16y$$

16 يقسم 16y و بالتالي 16 يقسم 9x بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم x

نضع $x = 16k$ حيث k عدد صحيح .

بالتعويض في المساواة $9x = 16y$ نحصل على $9(16k) = 16y$ و منه $y = 9k$

الحلول هي الثنائيات من الشكل $(16k; 9k)$ حيث k عدد صحيح .

$$(2) \quad 9 \times 4 - 16 \times 2 = 36 - 32 = 4 \text{ و منه } (4; 2) \text{ حل للمعادلة } 9x - 16y = 4$$

$$(3) \quad \text{ب طرح 4 من طرفي المعادلة } 9x - 16y = 4 \text{ نحصل على } 9x - 16y - 4 = 0$$

و نعلم أن $9 \times 4 - 16 \times 2 = 4$ إذن $9 \times 4 - 16 \times 2 - (9 \times 4 - 16 \times 2) = 0$ و منه $9(x - 4) = 16(y - 2)$

16 يقسم $16(y - 2)$ و بالتالي 16 يقسم $9(x - 4)$ بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم $x - 4$

نضع $x - 4 = 16k$ حيث k عدد صحيح أي $x = 16k + 4$

بالتعويض في المساواة $9(x - 4) = 16(y - 2)$ نحصل على $9(16k) = 16(y - 2)$ و منه $y = 9k + 2$

الحلول هي الثنائيات من الشكل $(16k + 4; 9k + 2)$ حيث k عدد صحيح .

تمرين محلول 2: ليكن n عددا طبيعيا . أثبت أن العدد $A = n(5n + 1)(13n + 1)$ يقبل القسمة على 6.

طريقة: للبرهان على أن العدد A يقبل القسمة على 6 يكفي البرهان أن A يقبل القسمة على 2 و على 3، لأن

2 و 3 أوليان فيما بينهما.

الحل: • نبرهن أن A يقبل القسمة على 2.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n \equiv 0[2]$ أو $n \equiv 1[2]$.

إذا كان $n \equiv 0[2]$ فإن $A \equiv 0[2]$.

إذا كان $n \equiv 1[2]$ فإن $(5n + 1) \equiv 6[2]$ و $6 \equiv 0[2]$ و منه $(5n + 1) \equiv 0[2]$ و بالتالي $A \equiv 0[2]$

إذن في الحالتين $A \equiv 0[2]$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $A \equiv 0[2]$.

• نبرهن أن A يقبل القسمة على 3.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n \equiv 0[3]$ أو $n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv 2[3]$.

إذا كان $n \equiv 0[3]$ فإن $A \equiv 0[3]$.

إذا كان $n \equiv 1[3]$ فإن $(5n + 1) \equiv 6[3]$ و $6 \equiv 0[3]$ و منه $(5n + 1) \equiv 0[3]$ و بالتالي $A \equiv 0[3]$.

إذا كان $n \equiv 2[3]$ فإن $(13n + 1) \equiv 27[3]$ و $27 \equiv 0[3]$ و منه $(13n + 1) \equiv 0[3]$ و بالتالي $A \equiv 0[3]$.

إذن في الحالات الثلاث $A \equiv 0[3]$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $A \equiv 0[3]$.

A يقبل القسمة على 2 و على 3 و بما أن 2 و 3 أوليان فيما بينهما فإن A يقبل القسمة على 6.

تعيين معاملي بيزو

a و b عدنان طبيعيان حيث $a > b > 0$.

نعتبر المتتاليتين (r_n) ، (q_n) حيث $r_n = PGCD(a, b)$ و $a = q_1 b + r_1$ ، $b = q_2 r_1 + r_2$ ، $r_1 = q_2 r_2 + r_3$ ، ...

$$r_n = q_2 r_{n+1} + r_{n+2}$$

لتكن المتتاليتان (u_n) و (v_n) حيث : $a = u_0 a + v_0 b$ ، $b = u_1 a + v_1 b$ و $r_n = u_{n+1} a + v_{n+1} b$

(1) عين الثنائيتين (u_0, v_0) و (u_1, v_1) .

(2) أحسب (u_2, v_2) بدلالة q_1 .

(3) أحسب u_3 و v_3 بدلالة u_2 و v_2 و q_2 .

(4) أعد العملية للحددين u_4 و v_4 .

(5) أعط تخميناً لعبارتي u_{n+1} و v_{n+1} بدلالة q_n ، u_{n-1} ، u_n ، v_{n-1} و v_n .

(6) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_{n-1} - q_n u_n$ و $v_{n+1} = v_{n-1} - q_n v_n$.

استعمال مجدول لتعيين معاملي بيزو .

في الخلية B_4 أحجز الوظيفة $=MOD(B2:B3)$ ؛

وفي الخلية C_4 أحجز الوظيفة $=INT(B2/B3)$ ؛

نحدد الخليتين B_4 و C_4 معاً ثم نسحب إلى الأسفل .

ونحصل على $pgcd(a, b) = 5$ الموجود في العمود B ،

وهو في الخلية سابقة للخلية التي تشمل العدد 0 .

في الخلية F_4 أحجز الوظيفة $=F2:C4*F3$ ؛

وفي الخلية G_4 أحجز الوظيفة $=G2:C4*G3$ ؛

بعد تحديد الخليتين F_4 و G_4 نسحب إلى الأسفل ونحصل

على معاملي بيزو الموجودين في نفس السطر للعدد $pgcd(a, b) = 5$.

للتحقيق نضيف العمود H ، ونحجز في الخلية H_2 الوظيفة $=D3:F2+D3:G2$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1					r_n	u_n	v_n	الحاصل
2	a	745			0	1	0	745
3	b	385			1	0	1	385
4	r_1	360	1		2	1	-1	360
5	r_2	25	1		3	-1	2	25
6	r_3	10	-1		4	-5	-2	10
7	r_4	5	2		5	-31	60	5
8	r_5	0	2		6	77	-149	0
9	r_6	#####	#DIV/0!		7	#####	#####	###

المبرهنة الصغيرة لـ فيرما

الهدف هو إثبات المبرهنة المسماة باسم: «مبرهنة فيرما Fermat الصغيرة».

إذا كان p عددا أوليا و a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p فإن p يقسم العدد $(a^{p-1} - 1)$ وتسمى

هذه النتيجة «المبرهنة الصغيرة لـ فيرما Fermat».

الجزء الأول

- (1) تحقق أن: 7 يقسم $5^6 - 1$ وأن 5 يقسم $8^4 - 1$ وأن 5 يقسم $6^4 - 1$ وأن 11 يقسم $9^{10} - 1$.
- (2) تحقق من أن: 6 لا يقسم $11^5 - 1$ و 3 لا يقسم $6^2 - 1$ و 12 لا يقسم $3^9 - 1$. اشرح لماذا؟
- (3) هل يمكن تطبيق هذه المبرهنة من أجل $p = 4$ و $a = 5$ ؟ في هذه الحالة الخاصة هل يقسم p العدد $(a^{p-1} - 1)$ ؟ ماذا يمكن أن نستنتج؟

الجزء الثاني

- ليكن $a = 9$ و $p = 5$ ونسمي المجموعة $E = \{1; 2; 3; 4\}$
- (1) من أجل كل عنصر k من E ، نرمز بالرمز r_k إلى باقي القسمة الإقليدية للعدد ka على p .
عين r_1, r_2, r_3, r_4 ثم بين أن المجموعة $\{r_1; r_2; r_3; r_4\}$ هي E .
 - (2) استنتج أن: $9 \times 18 \times 27 \times 36 \equiv 4 \times 3 \times 2 \times 1 [5]$ وأن: $(9^4 - 1)(4 \times 3 \times 2 \times 1) \equiv 0 [5]$.
 - (3) استنتج أن 5 يقسم العدد $(9^4 - 1)$.

الجزء الثالث

- ليكن p عددا أوليا و a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p . نسمي المجموعة $E = \{1; 2; 3; \dots; p-1\}$
- (1) نرمز بالرمز r_k إلى باقي القسمة الإقليدية للعدد ka على p . برّر أنه من أجل كل عنصر k من E ؛ $r_k \neq 0$.
 - (2) ليكن k و k' عنصرين من E بحيث: $r_k = r_{k'}$. أثبت أن $(k - k')a$ يقبل القسمة على p وأن $k = k'$.
 - (3) نعتبر F مجموعة البواقي r_k عندما يتغير k في المجموعة E . بين أن F تشمل $(p-1)$ عنصرا وأن $E = F$.
 - (4) باعتبار الجداء $a \times 2a \times 3a \times \dots \times (p-1)a$ و بملاحظة أن: $r_1 \times r_2 \times r_3 \times \dots \times r_{p-1} = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (p-1)$ برهن أن: $(a^{p-1} - 1)(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (p-1)) \equiv 0 [p]$.
 - (5) استنتج أن p يقسم $a^{p-1} - 1$.

الجزء الرابع

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي a ومن أجل كل عدد أولي p فإن العدد $(a^p - a)$ يقبل القسمة على p .

تمرين :

1. نعتبر المعادلة (E) : $109x - 226y = 1$

حيث x و y عدنان صحيحان .

(أ) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226 . ماذا

يمكن استنتاجه فيما يخص المعادلة (E) ؟

(ب) برهن أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة

الثنائيات من الشكل $(141 + 226k ; 68 + 109k)$ ،

حيث k عدد صحيح .

(ج) استنتج أنه يوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم d أصغر

من أو يساوي 226 ؛ ويوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم e

يحقق $109d = 1 + 226e$ (يطلب تعيين قيمتي d و e) .

2. برهن أن 227 عدد أولي .

3. نسمي A مجموعة الأعداد الطبيعية a حيث $a \leq 226$.

نعتبر الدالتين f و g للمجموعة A في نفسها .

f ترفق بكل عدد a ، باقي قسمة a^{109} على 227 ؛ g :

ترفق بكل عدد a ، باقي قسمة a^{141} على 227 .

(أ) تحقق من أن $g[f(0)] = 0$.

(ب) برهن أنه من أجل كل $a \in A - \{0\}$ ،

$$a^{226} \equiv 1 [227]$$

(ج) استنتج من 1. (ب) أنه من أجل كل $a \in A - \{0\}$ ،

$$g[f(a)] = a \text{ . ما القول عن } f[g(a)] = a \text{ ؟}$$

تعاليق

يمكن استنتاج الحل الخاص من خوارزمية أقليدس .

المطلوب البرهان على عدد أولي وبالتالي برنامج الحاسبة غير كاف .

لكي نطبق المبرهنة الصغيرة لـ فيرما يجب البرهان على الشرط أن a لا يقبل القسمة على العدد الأولي 227 . تطبيق خواص الموافقات وكذلك الخواص على القوى الطبيعية

حل مختصر

1. (أ) باستعمال خوارزمية أقليدس نحصل على $p \gcd(226, 109) = 1$.

حسب مبرهنة بيزو يوجد على الأقل عدنان صحيحان x و y يحققان (E)

(ب) نختار من الثنائية $(141 + 226k ; 68 + 109k)$ أن $(141, 68)$ حل خاص

للمعادلة (E) وبالتحقق نجد $109 \times 141 - 226 \times 68 = 1$. ومنه

$$109(x - 141) = 226(y - 68) \text{ أي } 109x - 226y = 109 \times 141 - 226 \times 68$$

نسميها (E') . 226 يقسم $109(x - 141)$ و $p \gcd(226, 109) = 1$ إذن حسب

غرض 226 يقسم $(x - 141)$ أي $x - 141 = 226k$ مع $k \in \mathbb{Z}$ وبالتعويض في

(E') نجد $y - 68 = 109k$ إذن $y = 109k + 68$ و $x = 226k + 141$ مع

$k \in \mathbb{Z}$. وعكسيا بالتعويض $(141 + 226k ; 68 + 109k)$ في (E) نجد

$$109(141 + 226k) - 226(68 + 109k) = 1$$

(ج) $109d = 1 + 226e$ معناه $109d - 226e = 1$. ومما سبق ينتج أن

$d = 226k + 141$ و $e = 109k + 68$ وبما أن $0 < d \leq 226$ معناه

$$0 < 226k + 141 \leq 226 \text{ فنجد } k = 0 \text{ أي } d = 141 \text{ و } e = 68 .$$

2. $\sqrt{227} \approx 15.07$ والقواسم الأولية التي تكون أصغر من $\sqrt{227}$ هي 2 ،

3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 والعدد 227 لا يقبل القسمة على أي منها إذن 227 أولي

3. (أ) $0^{109} \equiv 0 [227]$ إذن $f(0) = 0$ ومنه $f(0)^{141} = 0$ إذن

$$g[f(0)] = 0 \text{ أي } g[f(0)]^{141} \equiv 0 [227]$$

(ب) 227 عدد أولي إذن هو أولي مع كل a حيث $0 < a < 227$ ومنه a لا يقبل

القسمة على 227 وحسب المبرهنة الصغيرة لفرما $a^{226} \equiv 1 [227]$.

(ج) من أجل كل $a \in A - \{0\}$ ، $a^{141} [227] = g[f(a)]$ بما أن

$$f(a) \equiv a^{109} [227] \text{ فإن } f(a)^{141} \equiv (a^{109})^{141} [227] \text{ إذن } [f(a)]^{141} \equiv a^{109 \times 141} [227]$$

وحسب 1. (ب) $109 \times 141 = 1 + 226 \times 68$ ومنه $a^{109 \times 141} = a(a^{226})^{68}$

$$a^{109 \times 141} \equiv a [227] \text{ بما أن } a^{226} \equiv 1 [227] \text{ فإن } (a^{226})^{68} \equiv 1 [227] \text{ ومنه}$$

$$a(a^{226})^{68} \equiv a [227] \text{ إذن } a [227] = g[f(a)]$$

وبالمثل $f[g(a)] = [g(a)]^{109} [227]$ أي $f[g(a)] \equiv (a^{141})^{109} [227]$

$$f[g(a)] \equiv a [227] \text{ ومنه } f[g(a)] \equiv a [227]$$

تنبيه

من الضروري تحديد الموضوع المطروح وأي مسلك يجب اتخاذه ، على سبيل المثال هنا ، للبرهان أن عددين أوليان يجب التفكير في التحليل إلى جداء عوامل أولية أو استعمال مبرهنة بيزو .
السؤال على الدرس هو الأداة الرئيسية للاستدلال .

تمرين (من بكالوريا)

- a و b عدنان طبيعيان غير معدومين .
- برهن أنه إذا وجد عدنان صحيحان u و v حيث $au + bv = 1$ فإن a و b أوليان فيما بينهما .
 - استنتج أنه إذا كان $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ ، فإن a و b أوليان فيما بينهما .
 - المطلوب تعيين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$.
 - كل ثنائية $(a; b)$ تحقق الشرط تسمى حلا .
 - عين a عندما يكون $b = a$.
 - تحقق من أن $(1; 1)$ ، $(2; 3)$ و $(5; 8)$ هي ثلاث حلول خاصة .
 - بين أنه إذا كانت $(a; b)$ حلا وإذا كان $a \neq b$ فإن $a^2 - b^2 < 0$.
 - بين أنه إذا كانت $(x; y)$ حلا خاصا يختلف عن $(1; 1)$ فإن $(y - x; x)$ و $(y; y + x)$ هما كذلك حلان .
 - استنتج من 3. ب ثلاث حلول أخرى .
 - نعتبر المتتالية (a_n) حدودها أعداد طبيعية غير معدومة والمعرفة بـ : $a_0 = a_1 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
 - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(a_n; a_{n+1})$ هي حل .
 - استنتج أن العددين a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما .

توجيهات

- يمكنك . إن استعصى الأمر ، الاستعانة ببرهان مبرهنة بيزو .
- تجنب النشر واعتبر أن 1 هو مربع لكل من العددين -1 و 1 .
- استعمل البرهان بالخلف لإثبات أن $ab > 1$ و $a^2 - b^2 < 0$ (مع $a \neq b$) .
- تجنب الحسابات الطويلة ، واستخرج الثنائيتين من العبارة $x^2 + xy - y^2$ أو العبارة $-(x^2 + xy - y^2)$.
- استعمل البرهان بالتراجع لإثبات أن (a_n, a_{n+1}) هي حل .

1 - الأعداد الأولية .

بإستعمال جدول إراتوستان عين الأعداد الأولية
المحصورة بين 1 و 150 .

أ - ما هو عدد القسمات التي يمكن إجرائها على
الأعداد الأولية المتتالية لمعرفة أن العدد 1429 أولي ؟
ب - بدون استعمال حاسبة ولا جدول الأعداد الأولية
بين أن 1429 ليس أوليا .

أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير أولي
وأكبر تماما من 1 يقبل قاسما a أوليا حيث $a \leq \sqrt{n}$.
ب - الأعداد الأولية الأصغر من 30 هي :
2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29 .

اشرح لماذا العدد 853 أوليا .

في كل حالة من الحالات التالية أذكر إن كان العدد
أوليا .

أ - 251 . ب - 341 . ج - 1023 .
تعرف على الأعداد الأولية من بين الأعداد المقترحة
التالية : 937 ، 3705 ، 1933 ، 3411 ، 1549 ،
4163 .

n عدد طبيعي أصغر من 150 ، لا يقبل القسمة
على الأعداد الأولية الستة الأولى .
هل العدد n أولي ؟

برهن أنه إذا كان n عددا طبيعيا أوليا فإن $n + 7$
يكون غير أولي .

n عدد طبيعي أولي أكبر تماما من 3 .

برهن أن n يكتب على الشكل $3k + 1$ أو $3k - 1$ مع
 $k \in \mathbb{N}^*$. هل العكس صحيح ؟

ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5 .
أ - برهن أن p يكتب على الشكل :

$12k + 1$ أو $12k - 1$ أو $12k + 5$ أو $12k - 5$
مع $k \in \mathbb{N}$.

ب - ليكن $N = p^2 + 11$ باستعمال البرهان بفصل
الحالات ، عين باقي قسمة N على 24 .

10 n عدد طبيعي أولي أكبر تماما من 3 .

أ - برهن أن $8n - 1$ يوافق 0 أو 1 بترديد 3 .
ب - استنتج أنه إذا كان العدد $8n - 1$ أوليا ، فإن
العدد $8n + 1$ ليس أوليا .

11 ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5 .
برهن أنه إذا كان p و $p + 2$ عددين أوليين فإن
 $p + 1$ يقبل القسمة على 6 .

12 p عدد طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 3 .
برهن أن $p^2 - 1$ يقبل القسمة على 8 .

13 n عدد طبيعي حيث $n \geq 5$.

أ - برهن أن أحد من الأعداد التالية :

$n + 1$ ، $n + 3$ ، $n + 7$ ، $n + 9$ ، $n + 13$ ، $n + 15$ ،
يقبل القسمة على 5 .

ب - هل توجد قيم للعدد n التي تكون الأعداد الستة السابقة،
أولية ؟

14 n عدد طبيعي و $a = n^2 + 3n + 2$.

هل توجد قيم للعدد n التي يكون من أجلها العدد a أوليا ؟

15 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد
 $n^2 + 8n + 15$ ليس أوليا .

16 n عدد طبيعي غير معدوم .

نضع $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ (عاملي n)

(1) b عدد طبيعي غير معدوم حيث $b \leq 2007$.

أ - $a = 2007! + b$ ، برهن أن العدد a ليس أوليا .

ب - استنتج قائمة لـ 2007 عددا متتاليا ليس أوليا .

(2) كيف يمكن إنشاء بالمثل ، قائمة لـ 3000 عددا متتاليا
ليس أوليا .

17 أ - تحقق من أن العدد 173 أولي .

ب - عين كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الطبيعية
حيث $x^2 - y^2 = 173$.

ج - p عدد طبيعي أولي فردي . عين كل الثنائيات

(x, y) من الأعداد الطبيعية حيث $x^2 - y^2 = p$.

18 أ - أنشر الجداء $(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$.

ب - عين α و β حتى يكون

$a^2 - a + 1 = (a + \alpha)^2 + \beta$.

جـ - ليكن a عدد صحيح . هل يمكن للعدد

$$a^4 + a^2 + 1$$
 أن يكون أوليا ؟

التحليل إلى جداء عوامل أولية :

19 عيّن كل القواسم الموجبة لكل من الأعداد :

$$360 , 400 , 121 \text{ و } 1980$$

20 نعتبر العددين :

$$b = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11 ; a = 2^4 \times 3^5 \times 5 \times 7^2 \times 11$$

(1) برر أن العدد a يقبل القسمة على b .

(2) ما هو حاصل قسمة العدد a على b ؟

21 ما هي قواسم مربع عدد طبيعي أولي ؟

22 (1) حلّ إلى جداء عوامل أولية العدد 725 .

(2) عيّن كل القواسم الموجبة للعدد 725 .

(3) عيّن كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الطبيعية

$$x^2 - y^2 = 725$$
 التي تحقق .

23 ليكن a عدد طبيعي . برهن أنه إذا قسم 2 العدد

$$a^2$$
 فإن 2 يكون قاسما للعدد a .

24 a عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

برهن أنه إذا كان العدد الأولي p يقسم a^2 فإن p

يقسم a .

25 أ - كيف يمكن معرفة أن عددا N هو مربع تام من

خلال تحليله إلى جداء عوامل أولية ؟

ب - عيّن أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون

$$240n$$
 مربعا تاما .

ج - جد عددا مكون من أربع أرقام ، رقمه الأخير 9

وهو مربع تام ، يقبل القسمة على 147 .

26 (1) حلّ العدد $a = 4312$ إلى جداء عوامل أولية .

(2) ما هو أصغر عدد طبيعي بضربه بالعدد a نحصل

على : أ - مربع تام ؟

ب - مضاعف موجب للعدد 1000 ؟

27 (1) حلّ العدد 4032 إلى جداء عوامل أولية .

(2) عيّن العدد الطبيعي n حيث يكون : $n(n+1) = 4032$.

2 - المضاعف المشترك الأصغر لعددين .

28 أحسب المضاعف المشترك للعددين a و b في كل

من الحالات المقترحة التالية :

أ - $a = 26$ و $b = 12$.

ب - $a = 18$ و $b = -15$.

ج - $a = -12$ و $b = -13$.

د - $a = 230$ و $b = 128$.

هـ - $a = 876$ و $b = 1028$.

29 أحسب المجامع المقترحة أدناه ، استعمل المضاعف

المشترك الأصغر ، وأعط النتائج على شكل كسور

غير قابلة للاختزال .

$$\frac{82}{75} + \frac{19}{210} ; \frac{55}{195} + \frac{23}{216} ; \frac{9}{140} + \frac{13}{84}$$

30 في كل حالة من الحالات التالية ، عيّن قيم العدد

الطبيعي a غير المعدومة حيث :

أ - $ppcm(a, 56) = 392$

ب - $ppcm(a, 18) = 630$

ج - $ppcm(a, 42) = 882$

31 العدد الطبيعي n يوافق 3 بالترديد 35 وبالترديد 28 .

أ - برهن أن $n - 3$ هو مضاعف مشترك للعددين

$$28 \text{ و } 35$$

ب - ما هي أصغر قيمة للعدد n .

32 عيّن أصغر عدد طبيعي غير معدوم بحيث يكون 7

هو باقي قسمته على كل من العددين 52 و 64 .

33 n عدد طبيعي غير معدوم .

أحسب $ppcm(n, 2n+1)$

34 أحسب المضاعف المشترك الأصغر للعددين $2n+2$

$$\text{و } 4n+2$$
 مع n عدد طبيعي .

35 n عدد طبيعي غير معدوم .

عيّن $ppcm(a, b)$ حيث :

$$b = (3^n + 1)(7^n + 1) \text{ و } a = (3^{2n} - 1)(7^{2n} - 1)$$

36 n عدد طبيعي أكبر من 3 .

$$a = (6n^2 - 24)(n^2 - 9)$$

$$b = (3n^2 + 3n - 18)(n^2 - n - 6)$$

أ - برهن أن :

$$ppcm(a, b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9)ppcm(6, 3)$$

ب - عين $ppcm(a, b)$

37 العدد d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ،

ما هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a^2 و ab ؟

38 $a = 256$ و $b = 5040$

أ - حلل إلى جداء عوامل أولية كل من العددين a و b ،

ثم عين $ppcm(a, b)$ و $p \gcd(a, b)$

ب - عين $p \gcd(a, b)$ باستعمال خوارزمية أقليدس ،

ثم استنتج $ppcm(a, b)$

39 عين $ppcm(a, b)$ و $p \gcd(a, b)$ حيث :

$a = 460845$ و $b = 372645$

40 عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية التي

تحقق الجملة المعطاة ، في كل من الحالتين التاليتين .

$$\begin{cases} a + b = 60 \\ ppcm(a, b) = 40 \end{cases} \quad \text{أ -}$$

$$\begin{cases} a - b = 22932 \\ ppcm(a, b) = 98280 \end{cases} \quad \text{ب -}$$

41 عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية التي

تحقق المعادلة المقترحة في كل من الحالات التالية :

$$\text{أ - } ppcm(a, b) = 21 \times p \gcd(a, b)$$

$$\text{ب - } ppcm(a, b) - p \gcd(a, b) = 187$$

$$\text{ج - } ppcm(a, b) = p \gcd(a, b)$$

$$\text{د - } ppcm(a, b) + 11p \gcd(a, b) = 20$$

$$\text{هـ - } ppcm(a, b) - 9p \gcd(a, b) = 13 \text{ مع } a \leq b$$

في التمارين 42 ، 43 و 44 المطلوب تعيين كل

الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية .

$$42 \quad ppcm(a, b) = 84 \text{ و } p \gcd(a, b) = 7$$

$$43 \quad ppcm(a, b) = 420 \text{ و } p \gcd(a, b) = 14$$

$$44 \quad ppcm(a, b) = 90 \text{ و } p \gcd(a, b) = 18$$

$$45 \quad n \text{ عدد طبيعي أكبر من أو يساوي } 6$$

$$\text{نضع : } a = 3n + 2 , b = n - 5$$

$$\text{أ - أحسب } a - 3b$$

$$\text{استنتج أن } p \gcd(a, b) = p \gcd(b, 17)$$

ب - عين قيم العدد n التي يكون من أجلها

$$p \gcd(a, b) = 17 \text{ و } ppcm(a, b) \leq 150$$

3 - مبرهنة بيزو .

46 n عدد طبيعي . أثبت أن العددين a و b أوليان

فيما بينهما في كل من الحالتين التاليتين .

$$\text{أ - } a = n , b = 2n + 1$$

$$\text{ب - } a = 2n + 3 , b = 3n + 5$$

47 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون :

$$PGCD(11n + 3, 7n + 2) = 1 ; PGCD(n, n^2 + 1) = 1$$

48 n عدد طبيعي غير معدوم ؛

$$\text{نضع } a = 2n^2 + 4n + 1 \text{ و } b = n + 2$$

باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أن العددين a و b

أوليان فيما بينهما .

49 n عدد طبيعي غير معدوم .

$$\text{أ - تحقق من أن } (n^3 + 1)^2 = n^2(n^4 + 2n) + 1$$

ب - استنتج أن العددين $n^3 + 1$ و $n^4 + 2n$ أوليان

فيما بينهما .

50 n عدد طبيعي غير معدوم .

$$\text{أ - حلل العدد } n(2n + 1) - 1$$

ب - باستعمال مبرهنة بيزو ، جد القاسم المشترك

الأكبر للعددين $n + 1$ و $n(2n + 1)$.

51 بين باستعمال خوارزمية أقليدس ، أن العددين 12

و 35 أوليان فيما بينهما .

$$\text{استنتج ثنائية من } \mathbb{Z}^2 \text{ تحقق المعادلة } 12x + 35y = 1$$

52 أ - أكتب خوارزمية أقليدس لتعيين

$$PGCD(257, 45)$$

ب - انطلاقا من المساواة الأخيرة والتي يكون فيها

الباقى غير معدوم ، أحسبه بدلالة البواقي السابقة له .

ج - عين ثنائية من الأعداد الصحيحة (u, v) حيث

$$\text{يكون } 257u + 45v = PGCD(257, 45)$$

$$53 \quad a = 1050 \text{ و } b = 735$$

أ - باستعمال خوارزمية أقليدس ، عين $PGCD(a, b)$

ب - عين عددين صحيحين u و v حيث :

$$au + bv = \text{PGCD}(a, b)$$

54 بين باستعمال خوارزمية أقليدس ، أن العددين 50

و 77 أوليان فيما بينهما .

استنتج ثنائية من $\mathbb{Z}^2$ تحقق المعادلة $50x + 77y = 3$.

55 (1) عين $\text{PGCD}(168, 20)$.

(2) هل المعادلة $168x + 20y = 6$ تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ؟

(3) هل المعادلة $168x + 20y = 4$ تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ؟

المبرهنة غوص .

56 عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الصحيحة التي

$$5a = 7b$$

57 عين كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الصحيحة التي

$$55x = 16y$$

58 عين كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الصحيحة التي

$$21(x - 3) = 12(y + 4)$$

59 (1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $3x - 13y = 1$.

(2) استنتج مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث

$$3x \equiv 1[13]$$

60 تعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية

$$2045x - 64y = 1 \dots (1)$$

(1) عين $\text{PGCD}(2045, 64)$.

(2) استنتج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

عين حلا خاصا للمعادلة (1) .

(3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) .

61 في $\mathbb{Z}^2$ نعتبر المعادلة (1) التالية: $11x - 5y = 14$.

(1) تحقق من أن الثنائية $(19, 39)$ حل للمعادلة (1) ثم

استنتج كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الصحيحة التي

تحقق المعادلة (1) .

(2) بين أنه توجد ثنائية وحيدة (x_0, y_0) حلا للمعادلة (1)

$$مع \quad 0 < x_0 < 5$$

62 في المستوي المنسوب إلى معلم ، نعتبر المستقيم Δ

$$ذو المعادلة \quad 21x - 31y - 2 = 0$$

أ - تحقق أن النقطة $A(6, 4)$ تنتمي إلى المستقيم Δ .

ب - عين كل نقط المستقيم Δ التي إحداثياتها تكون أعدادا صحيحة .

63 n عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر العدد a حيث

$$a = n(n^2 + 5)$$

برهن أن a يقبل القسمة على 6 .

64 n عدد طبيعي أكبر تماما من 2 .

$$a = n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$$

(1) أ - أكتب العدد a على شكل تحليل إلى جداء خمسة

أعداد متتالية .

ب - برهن أن العدد a يقبل القسمة على كل من 3 و 5 .

(2) برهن أن العدد a يقبل القسمة على 8 .

استنتج مما سبق أن العدد a يقبل القسمة على 120 .

65 السؤال : n عدد طبيعي غير معدوم . هل العدد

$$6(n^2 + n)$$

الجواب : من كتابة العدد $6(n^2 + n)$ فإنه يقبل القسمة

$$على \quad 6 \quad \text{ولدينا} \quad n^2 + n = n(n + 1)$$

بما أن $n(n + 1)$ عدد زوجي فإن العدد $2(n^2 + n)$

يقبل القسمة على 4 وبالتالي $6(n^2 + n)$ يقبل القسمة على

4 . وحسب مبرهنة غوص فإن العدد $6(n^2 + n)$ يقبل

$$القسمة على \quad 24 = 6 \times 4$$

ما هو تعليقك على هذا الجواب علما أنه من أجل $n = 1$

$$يكون \quad 6(n^2 + n) = 12$$

5 - المبرهنة الصغيرة لفرما .

66 أحسب باقي قسمة العدد 7^{10} على 11 ، ثم 7^{2521}

على 11 .

67 أ - برهن أن العدد 331 أولي .

ب - n عدد طبيعي يكتب في النظام العشري بـ 330

رقما كلها مساوية للعدد 9 . أحسب $n + 1$.

ج - استعمل المبرهنة الصغيرة لفرما للبرهان على أن

العدد n يقبل القسمة على 331 .

68 برهن أنه من أجل كل عدد صحيح n ، $n^5 - n$ يقبل القسمة على 15 .

69 (1) ليكن عددا صحيحا . ما هو باقي قسمة العدد n^3 على 3 ؟ و n^4 على 3 ؟ (2) عين مجموعة قيم العدد الصحيح n التي يكون من أجلها $[3] 0 \equiv n^4 + n^3 + 2n^2 + 2n + 1$.

70 برهن أنه من أجل كل عدد صحيح n ، $n^{13} - n$ يقبل القسمة على 2730 .

71 (1) برهن أن $[3] x^3 \equiv x$ وهذا من أجل كل عدد صحيح x .

(2) ما هي قيم العدد الصحيح x حيث $[4] x^3 \equiv x$ ؟ (3) استنتج قيم x حيث $[12] x^3 \equiv x$.

72 (1) a عدد صحيح ، ما هي القيم التي يمكن أن توافق a^4 بتريديد 5 ؟

(2) استنتج أن المعادلة $x^4 + 781 = 3y^4$ لا تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$.

6 - تشفير الكلمات

في التمارين من 73 إلى 77 نضع $N = \{0, 1, 2, \dots, 27\}$ ونستعمل الحروف المرقمة كما يلي:

ض	ص	ش	س	ز	ر	ذ	د	خ	ح	ج	ث	ت	ب	أ
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

ي	و	هـ	ن	م	ل	ك	ق	ف	غ	ع	ظ	ط
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

73 نقوم بعملية التشفير باستعمال التحويل $x \mapsto y$ حيث y هو باقي قسمة $x + 3$ على 28 .

(1) شفر الكلمة " الجزائر " (2) بين أنه من أجل كل y من المجموعة N يوجد x وحيد في المجموعة N حيث يكون y هو باقي قسمة $x + 3$ على 28 .

(3) حل تشفير كل من الكلمات التالية : تبضل ؛ لثغوا تهصاشث ؛ وذوز .

74 لتشفير كلمة نستعمل الدالة f للمجموعة N في نفسها حيث $f(x)$ هو باقي قسمة العدد $15x + 2$ على

28 ، مع اعتبار العدد x هو رتبة الحرف قبل التشفير و $f(x)$ هو رتبة الحرف بعد التشفير . نستعمل جدول إكسال للمساعدة :

في العمود الأول من A_2 إلى A_{29} نسجل الحروف وأمامها من B_2 إلى B_{29} نسجل أعداد المجموعة N . في الخلية C_2 نحجز الوظيفة $=MOD(15*B2+2;28)$ ؛ وفي الخلية D_2 نحجز الوظيفة $=INDEX(SA$2:SB$29,1+C2,1)$ ؛ ثم نحدد الخليتين معاً ونسحبهما إلى غاية الصف 29 . أ - شفر الكلمة " رياضيات " . ب - حل التشفير للكلمة " عرتناطت " .

75 نعتبر الدالة f للمجموعة في نفسها حيث $f(x)$ هو باقي قسمة العدد $14x + 3$ على 28 .

(1) شفر الكلمة " سكر " . ما هو المشكل المطروح ؟ (2) بين أنه من أجل كل عددين a و b من المجموعة N ، إذا كان $f(a) = f(b)$ ، فإن $[2] a - b \equiv 0$. (3) اشرح كيف يمكن اختيار الدالة f حتى يكون تشفير الكلمات وحل تشفير الكلمات ، ممكنا ؟

76 نعرف التشفير بواسطة الدالة f حيث $f(x)$ هو باقي قسمة $11x + 6$ على 28 .

(1) شفر كلمة " تلمسان " . (2) حل المعادلة $[28] 11x \equiv 1$ (لاحظ $55 = 5 \times 11$) . (3) بين أنه إذا كان $f(x) = y$ فإن $[28] y \equiv 23x + 2$. (4) بين أن كل حرفين مختلفين يُحوّلان إلى حرفين مختلفين . (5) حل تشفير العبارتين التاليتين : شبكخغ ؛ هغغب .

77 نريد استعمال تشفير تآلفي لحل تشفير الجملة التالية : " شكجرتظيئه ظق جفجرلو ثكثلنثن ثكخفتو " .

نعرف التشفير التآلفي بـ $[28] y \equiv ax + b$ حيث x هو الرقم المناسب للحرف قبل التشفير و y الرقم المناسب للحرف بعد التشفير . a و b عدنان طبيعيان محصورين بين 0 و 27 ونفرض في هذا التمرين أن a عدد أولي . نفرض أن الحرف "ث" يحول إلى الحرف "ذ" والحرف "ص" يحول إلى الحرف "خ" .

ب - تطبيق: عين الثنائيات (x, y) في الحالتين التاليتين :

$$(a, b) = (7, 2) ; (a, b) = (11, 5) .$$

82 أ - برهن أن كل مجموع 5 أعداد طبيعية فردية متتالية ، ليس أوليا .

ب - في الحالة العامة من أجل $n \geq 2$ ، هل يمكن أن يكون مجموع n عددا طبيعيا فرديا متتالعا ، أوليا .

83 أعداد مرسان (Mersenne)

أعداد مرسان هي الأعداد الأولية التي تكتب على

الشكل : $N = 2^p - 1$ مع $p \in \mathbb{N}$.

أ - a و n عددان طبيعيان غير معدومين ويختلفان عن 1 . بسط المجموع $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$.

ب - برهن أنه إذا كان $a^n - 1$ أوليا فإن $a = 2$.

ج - برهن أنه إذا كان n غير أولي فإن $2^n - 1$ يكون غير أولي .

د - برهن أنه إذا كان p أوليا فإن $2^p - 1$ يكون أوليا من أجل بعض القيم للعدد p ويكون غير أولي من أج القيم الأخرى .

84 أ و b عددان طبيعيان . نضع $N = a^4 + 4b^4$.
أ - برهن أن :

$$N = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

ب - برهن أنه من أجل $b \geq 2$ ، N لا يمكن أن يكون أوليا .

ج - من أجل $b = 1$ ، هل يمكن أن يكون N أوليا ؟

د - برهن أن العدد $(1207^4 + 4^{1205})$ ليس أوليا .

85 نريد تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تكون

من أجلها الأعداد $n+4$ ، $n+6$ ، $n+10$ ،

$n+12$ ، $n+16$ ، $n+22$ أولية .

أ - أدرس الحالات $n \leq 7$.

ب - أدرس الحالات $n > 7$ ومن أجل ذلك استعمل باقي

القسمة الأقليدية للعدد n على 7 .

86 ليكن p عددا أوليا . عين مجموع وجداء كل القواسم

الموجبة للعدد " p " حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

$$(1) \text{ بين أن : } \begin{cases} 3a + b \equiv 8[28] \\ 13a + b \equiv 6[28] \end{cases}$$

(2) بين أن : $5a = 14k - 1$ مع k عدد صحيح .

(3) أ - بين أن : $a \equiv 11[14]$.

ب - استنتج قيمة a ثم قيمة b .

ج - تحقق أن a و 28 أوليان فيما بينهما . (يجب أن يتحقق هذا الشرط لكي لا يحول حرفين مختلفين إلى نفس الحرف)

(4) أعط تشفيرا للكلمة "رياضيات"

(5) حل تشفير الجملة المعطاة سابقا .

تمارين للتعمق

1 - الأعداد الأولية .

78 k عدد طبيعي . نضع $n = 2310k + 2100$.

(1) برهن أنه إذا غيرنا أحد أرقام العدد n بدون تغيير رقم أحاده فيكون دائما غير أولي .

(2) برهن أن $n \equiv 0[5]$ ، $n \equiv 0[3]$ ، $n+1 \equiv 0[11]$ و $n \equiv 0[7]$.

(3) استنتج أن n يكون دائما غير أولي مهما غيرنا أي رقم من أرقامه .

(4) برهن أنه يوجد عدد غير منته من الأعداد بحيث لا يمكن تحويلها إلى أعداد أولية بتغيير رقما منها .

89 أ - برهن أنه كل عدد غير أولي n أكبر من أو يساوي 6 يقسم العدد $(n-1)!$.

تذكير : $(n-1)! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1)$.

ب - هل الخاصية السابقة تبقى صحيحة من أجل n أولي ؟

90 ليكن p عددا أوليا . نضع $n = 2 \times 3 \times \dots \times p$.

(1) برر أن الأعداد $n+2$ ، $n+3$ ، $n+4$ ، ... ، $n+p$ ليست أولية .

(2) استنتج عشرة أعداد طبيعية متتالية غير أولية ، ثم عثرون عددا متتالعا غير أولي .

91 أ - a و b عددان طبيعيان أوليان حيث $a > b$.

عين كل الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ حيث :

$$x^2 - y^2 = (ab)^2$$

87 (1) حل العدد 469 إلى جداء عوامل أولية ، ثم

استنتج كل قواسمه الموجبة .

(2) تحقق أنه من أجل كل عددين طبيعيين x, y يكون

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

(3) عين كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الطبيعية التي

$$x^3 - y^3 = 469$$

88 ليكن p عددا أوليا . أثبت أنه يكون p قاسما للعدد

1806 إذا وفقط إذا كان $p-1$ قاسما للعدد 1806 .

89 a و b عدنان طبيعيان . نضع $n = 2^a 3^b$.

أ - عين عدد القواسم الموجبة للعدد n .

ب - عين n علما أن عدد قواسم العدد $2n$ هو

ضعف عدد قواسم العدد n .

90 (1) ليكن $n = 200$

أ - عين مجموعة القواسم الموجبة للعدد n .

ب - ليكن N عدد قواسم العدد n و p جداء هذه

القواسم . تحقق من العلاقة (1) : $n^N = p^2$.

(2) ليكن $n = 2^a 5^b$ مع a و b عددين طبيعيين .

أ - برهن أن عدد قواسم العدد n

$$N = (a+1)(b+1)$$

ب - أحسب الجداء p لهذه القواسم .

ج - هل العلاقة (1) هي دائما صحيحة ؟

د - عين العدد n من الشكل $2^a \times 5^b$ علما أن

$$p = 20^{42}$$

91 ليكن N عددا طبيعيا حيث تحليله إلى جداء عوامل

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

أ - برهن أن عدد القواسم الموجبة للعدد N هو

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$$

ب - برهن أنه إذا كان عدد القواسم الموجبة لعدد طبيعي ،

فرديا فإن هذا العدد يكون مربعا تاما .

92 نريد تعيين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها

$$2^8 + 2^{11} + 2^n$$

طبيعي k حيث $2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2$.

أ - تحقق من أن $2^n = (k+48)(k-48)$.

ب - استنتج أنه يوجد عدنان طبيعيان a و b يحققان :

$$a + b = n , 2^a = k + 48 , 2^b = k - 48$$

$$و 2^b (2^{a-b} - 1) = 96$$

ج - باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية للعدد 96 ،

عين قيمة العدد n .

93 المعكوس (palindrome) هو عدد أو كلمة أو جملة

لها نفس القراءة من جهتين مختلفتين أمثلة :

1325231 ؛ توت ؛ حوت فمه مفتوح .

نعتبر العدد $a = 12345678987654321$.

(1) أحسب الجداء 1001001×111 .

علما أن العدد 333667 أولي ، حلل العدد 1001001 إلى

جداء عوامل أولية .

(2) أحسب 11^2 ، 111^2 ، 1111^2 .

(3) حلل العدد a إلى جداء عوامل أولية .

94 القول عن عددين أنهما وديان معناه أن كل منهما

يكون مساويا لمجموع القواسم العدد الآخر باستثناء العدد

نفسه

في كل من الحالات التالية أذكر إن كان العدنان وديين أم لا

أ - 220 و 284

ب - $2^5 \times 37$ و $2 \times 5 \times 11^2$

ج - 18416 و 17296

2 - المضاعف المشترك الأصغر لعددين .

في التمارين 95 ، 96 و 97 المطلوب تعيين كل الثنائيات

(x, y) التي تحقق الجملة المقترحة

$$95 \quad \begin{cases} ppcm(x, y) = 60 \\ xy = 180 \end{cases} \text{ مع } x \leq y$$

$$96 \quad \begin{cases} ppcm(x, y) = 12p \gcd(x, y) \\ x + y = 105 \end{cases} \text{ مع } x \leq y$$

$$97 \quad \begin{cases} 3ppcm(x, y) = xy \\ x^2 - y^2 = 405 \end{cases}$$

98 m و n عدنان طبيعيان غير معدومين .

$$b = 3n + 5m , a = 2n + 3m$$

أ - تحقق أن $m = 2b - 3a$ و $n = 5a - 3b$.

ب — برهن أن $PGCD(a, b) = PGCD(n, m)$.

ج — استنتج أن العددين $2n+3$ ، $3n+5$ أوليان فيما بينهما . ما هو مضاعفهما المشترك الأصغر ؟

99 أ — برهن أنه إذا كان العددين الطبيعيين a و b أوليين فيما بينهما فإن العددين a^2+b^2 و ab يكونا كذلك أوليين فيما بينهما .

ب — عين كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الطبيعية التي تحقق $ppcm(x, y) = 30$ و $x^2 + y^2 = 325$.

100 تعتبر في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية : $16x + 59y = 2006 \dots (1)$.

(1) حل إلى جداء عوامل أولية العدد 2006 ، ثم استنتج أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (1) فإن x يكون مضاعفا للعدد 59 .

(2) حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، المعادلة (1) .

(3) غير الحلول (x, y) للمعادلة (1) التي تنتمي إلى $\mathbb{N}^2$.

(4) عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة a و b التي تحقق $16m + 59d = 2006$ حيث $m = ppcm(a, b)$ و $d = pgcd(a, b)$.

101 عين الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية حيث

يكون مضاعفهما المشترك الأصغر وقاسمهما المشترك الأكبر حلين للمعادلة $x^2 - 91x + 588 = 0$.

102 نعتبر كثيري الحدود التعريفين على $\mathbb{R}$:

$$p(x) = 10x^3 + 60x^2 + 110x + 60$$

$$q(x) = 6x^2 + 18x + 12$$

(1) أ — احسب $p(-2)$ و $p(-1)$.

ب — عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون

$$p(x) = (x+1)(x+2)(ax+b)$$

ج — حل كثير الحدود $q(x)$.

(2) نفرض n عدد طبيعي .

أ — اشرح لماذا $PGCD(5n+15, 3)$ هو 1 أو 3 ؟

ب — برهن أن $PGCD(5n+15, 3) = 3$ إذا وفقط إذا كان n مضاعفا للعدد 3 .

ج — عين حسب قيم n ، القاسم المشترك الأكبر

والمضاعف المشترك الأصغر للعددين $p(n)$ و $q(n)$.

103 (1) حل العدد 319 إلى جداء عوامل أولية .

(2) a و b عددين طبيعيين .

أ — تحقق من أن :
$$\begin{cases} a = 2(3a+5b) - 5(a+2b) \\ b = 3(a+2b) - (3a+5b) \end{cases}$$

ب — برهن أنه إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإن $3a+5b$ و $a+2b$ أوليان فيما بينهما .

عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق :

$$\begin{cases} (3a+5b)(a+2b) = 1276 \\ ab = 2PPCM(a, b) \end{cases}$$

104 بكالوريا

x و y عددين طبيعيين حيث $0 < x \leq y$ ، نضع

$$pgcd(x, y) = d \text{ و } ppcm(x, y) = m$$

نريد تعيين x و y حيث $m^2 - 5d^2 = 2000 \dots (*)$.

أ — برهن أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة $(*)$ فإن d^2 يكون قاسما للعدد 2000 .

ب — حل العدد 2000 إلى جداء عوامل أولية . استنتج

القواسم المربعة التامة للعدد 2000 .

ج — برهن أن 5 هو قاسم مشترك للعددين d و m . ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

د — استنتج القيم الممكنة للعددين x و y .

105 x و y عددين طبيعيين غير معدومين حيث :

$$m^3 + 3d^3 = 6480 \text{ مع } pgcd(x, y) = d$$

$$\text{و } ppcm(x, y) = m$$

أ — حل العدد 6480 إلى جداء عوامل أولية .

ب — ما هي الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم العدد 6480 .

ج — عين كل الثنائيات (x, y) التي تحقق المعادلة

$$m^3 + 3d^3 = 6480$$

106 بكالوريا

(1) حل كلا من العددين 1995 و 105 إلى جداء

عوامل أولية .

(2) α و β عددين طبيعيين حيث $\alpha < \beta$.

في كم ثانية يلتقيان العقربان من جديد ولأول مرة في النقطة A ؟

3 - مبرهنة بيزو .

111 استعمل خوارزمية أقليدس لتعيين حلا (x_0, y_0)

من الأعداد الصحيحة لكل من المعادلتين التاليتين :

أ - $1694x + 319y = 11$

ب - $3388x + 638y = 22$

112 a و b عدنان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

(1) برهن أن $a+b$ و $a-b$ ليسا حتما أوليين فيما بينهما .

(2) تحقق أنه من أجل كل ثنائية (u, v) من الأعداد

الصحيحة يكون : $u(a+b) + (v-u)b = ua + vb$

(3) استنتج أن العددين $a+b$ و b أوليان فيما بينهما .

(4) ما القول عن العددين $a+b$ و ab ؟

113 a و b عدنان طبيعيان حيث يوجد عدنان

صحيحان u و v يحققان $ua + vb = 1$

أ - ما القول عن العددين a و b .

ب - برهن أنه إذا كان عددا طبيعيا c يقسم $a+b$ فإن

c و أوليان فيما بينهما وكذلك a و c أوليان فيما بينهما .

114 a و b عدنان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

برهن أن العددين $a^2b + ab^2$ و $a + ab + b$ أوليان فيما بينهما .

115 m و n عدنان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

نضع $a = 3m + 4n$ و $b = 4m + 5n$

أ - تحقق أن $4a - 3b = n$

ب - عين عددين صحيحين α و β حيث $m = \alpha a + \beta b$

ج - برهن أن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

116 أ - أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدنان

$14n + 3$ و $5n + 1$ أوليان فيما بينهما .

استنتج أن 87 و 31 أوليان فيما بينهما .

ب - عين حلا (u, v) للمعادلة $87u + 31v = 1$ ثم

استنتج حلا (x, y) لمعادلة $87x + 31y = 2$

حل في المجموعة $N \times N$ المعادلة $\alpha \times \beta = 105$

(3) a و b عدنان طبيعيان غير معدومين وغير

أوليين فيما بينهما حيث $a < b$

نضع : $ppcm(a, b) = \mu$ و $p \gcd(a, b) = \delta$

عين a و b حيث :

$$\begin{cases} 95\delta + 19\mu = 1995 \\ \delta < 7 \end{cases}$$

107 n عدد طبيعي غير معدوم .

$$b = 4n^3 + 12n^2 + 8n \text{ و } a = 6n^2 + 18n + 12$$

(1) حل a و b

(2) أ - برهن أن :

$$p \gcd(a, b) = 2(n+1)(n+2) \times p \gcd(3, 2n)$$

ب - عين ، حسب قيم العدد n ، $p \gcd(a, b)$

ج - استنتج حسب قيم n ، $ppcm(a, b)$

108 نعتبر المعادلة ذات المجهولين العددين الطبيعيين x

و y التالية : $x + y - 1 = ppcm(x, y)$

(1) أدرس الحالة $x = 0$ ثم الحالة $y = 0$

(2) نفرض أن x و y غير معدومين .

أ - بين أن $x-1$ مضاعف للعدد y و $y-1$ مضاعف للعدد x

ب - أعط كل الحلول للمعادلة

$$x + y - 1 = ppcm(x, y)$$

109 لدينا عدد معين من القريصات أصغر من 1000 .

a عدد طبيعي حيث $2 \leq a \leq 10$

إذا وزعنا القريصات في أكياس كل منها تشمل a قريصة ، دائما تنقص الكيس الأخير قريصة .

ما هو عدد القريصات حيث إذا وزعناها في أكياس كل منها تشمل بالضبط 11 القريصة .

110 العقربان الكبير والصغير لساعة دائرة الشكل ،

منطبقان في اللحظة $t = 0$ ، ورأسهما يكون في النقطة A .

في كل ثانية العقرب الكبير يتحرك بزاوية

قياسها $\frac{\pi}{6}$ راديان والعقرب الصغير يتحرك

بزاوية قياسها $\frac{\pi}{10}$ راديان .



(1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k و من أجل كل عدد طبيعي x يكون :

$$(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})=x^k-1$$

في ما يلي نعتبر a عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

(2) لتكن n ، d و k أعداد طبيعية غير معدومة حيث

$$n = dk . \text{ برهن أن } a^d - 1 \text{ هو قاسم للعدد } a^n - 1 .$$

ب - استنتج أن العدد $2^{2004} - 1$ على 7 ، على 63 ثم على 9 .

(3) ليكن m و n عددين طبيعيين غير معدومين و d قاسمهما المشترك الأكبر .

أ - نعرف العددين الطبيعيين m' و n' بـ : $m = dm'$ و $n = dn'$.

باستعمال مبرهنة بيزو على العددين m' و n' ، برهن أنه يوجد عدنان صحيحان u و v حيث : $mu - nv = d$.

ب - نفترض أن u و v موجبان تماماً ،

$$\text{برهن أن } (a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1 .$$

برهن إذن أن $a^d - 1$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $a^{mu} - 1$ و $a^{nv} - 1$.

ج - أحسب باستعمال النتيجة السابقة القاسم المشترك الأكبر للعددين $2^{63} - 1$ و $2^{60} - 1$.

4 - مبرهنة غوص .

(1) α و β عدنان طبيعيين أوليان فيما بينهما ، جد α و β حيث : $\beta(\beta^3 - 1) = 28\alpha^2$.

(2) a ، b ، c ، d و e أعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حدوداً متتابعة لمتتالية هندسية أساسها r ، حيث a و r أوليان فيما بينهما ، و $28a^3 = e - b$.

أحسب الأساس r ثم الأعداد a ، b ، c ، d و e .

(1) α و β عدنان طبيعيين أوليان فيما بينهما .

عين α و β حيث $\alpha(\alpha^2 - 19) = 35\beta$ و $\alpha > \beta$.

(2) (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها r

حيث u_0 و r عدنان طبيعيين أوليان فيما بينهما و $u_0 > r$.

- أوجد u_0 و r حتى يكون $35u_0^2 + 19u_1 - u_0r^3 = 0$.

- نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. أحسب S_n بدلالة n .

- أوجد قيم n حتى يقبل S_n القسمة على 30 .

(1) جد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 2490 ، 32785 و 2905 .

(2) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $7x + 6y = 79$.

(لاحظ $72 + 7 = 79$) .

(3) اشترى نادي كرة يد ملابس رياضية للاعبيه . إذا علمنا

أن ثمن بذلة اللاعب هو 2905 دج و ثمن بذلة اللاعب

هو 2490 دج و علمنا أن النادي دفع في المجموع 32785

دج . ما هو عدد اللاعبين وعدد اللعابات ؟

(1) عين القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ، 1497 و 2994 .

(2) x و y عدنان صحيحان ولتكن المعادلة

$$1996x - 1497y = 2994 \dots (1)$$

- أثبت أن x مضاعف للعدد 3 و y مضاعف للعدد 2 ثم عين حلول المعادلة (1) .

- عين الحلول (x, y) بحيث يكون : $xy = 1950$.

(1) حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول

$$(x', y') : 9x' - 14y' = 13 \text{ علماً أن } (3, 1) \text{ حلاً لها .}$$

(2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول

$$(x, y) : 45x - 28y = 130$$

بين أنه إذا كان (x, y) حلاً لهذه المعادلة فإن x

مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5 ؛ ثم حل هذه المعادلة .

(3) N عدد طبيعي يكتب $2\alpha\alpha3$ في نظام تعداد أساسه

9 و $5\beta\beta6$ في نظام تعداد أساسه 7 .

عين α و β ثم أكتب N في النظام العشري .

(1) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180.

(2) حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة :

$$(1) \dots 225x - 180y = 90$$

(3) عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق

$$|x - y + 1| < 2$$

(4) a و b عدنان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{52}$ ، $\overline{252}$ في النظام ذي الأساس α ، و يكتبان $\overline{44}$ ، $\overline{206}$ في النظام ذي الأساس β . عين α و β ثم a و b .

124 بكالوريا

$\mathbb{Z}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة .

لتكن في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، المعادلة ذات المجهول

$$(x, y) : 43x - 13y = \lambda \dots (*) \text{ مع } \lambda \in \mathbb{Z} .$$

(1) تحقق من أن $(-3\lambda, -10\lambda)$ حل للمعادلة $(*)$.

— حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $(*)$.

(2) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في نظام تعداد

أساسه 6 ويكتب $\overline{\beta 0 \gamma \gamma \gamma}$ في نظام تعداد أساسه 5 .

— بين أن α ، β و γ تحقق $43\alpha - 13\beta = \gamma$.

— عين α ، β و γ ثم أكتب N في النظام العشري .

125 بكالوريا

(1) — عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2505 و 3006 .

ب — نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول

$$(x, y) \text{ التالية : } 2505x - 3006y = \alpha \dots (1) \text{ مع } \alpha \in \mathbb{Z} .$$

ما هو الشرط الذي يحققه العدد α حتى تقبل

المعادلة (1) حلولا في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(2) نفرض فيما يلي أن $\alpha = 2004$.

5 - المبرهنة الصغيرة للفرما .

$$126 \text{ حل في المعادلة } \mathbb{Z} [30] x^5 = x$$

$$127 \text{ حل إلى جداء عوامل أولية العدد } 546$$

برهن أن $x^{546} = x [546]$ من أجل x عدد صحيح .

128 (1) برهن أنه إذا كان العدد الطبيعي لا يقبل القسمة

على 7 فإن $n^6 - 1$ يقبل القسمة على 7 .

(2) برهن أن الجداء $n(n^6 - 1)$ يقبل القسمة على 42

وهذا من أجل كل عدد طبيعي n .

(3) كيف يمكن اختيار n حتى يكون الجداء $n(n^6 - 1)$

قابلا للقسمة على 84 ؟

129 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $n^{15} - n^3$

يقبل القسمة على $2^{15} - 2^3$.

130 (1) a عدد طبيعي ، برهن أن $a^5 - a$ يقبل القسمة

على 10 .

(2) a و b عدنان طبيعيان حيث $a \geq b$.

أ — برهن أنه إذا كان $a^5 - b^5$ يقبل القسمة على 10 فإن

$a^2 - b^2$ يقبل القسمة على 20 .

عين العددين الطبيعيين a و b حيث $a^2 - b^2 = 720$.

131 (1) برهن أنه إذا كان n عددا طبيعيا فرديا فإنه

يكتب على الشكل $4q + 1$ أو $4q - 1$ مع q عدد طبيعي .

استنتج أن $n^{16} \equiv 1 [64]$.

(2) برهن أنه إذا كان P عددا أوليا أكبر من أو يساوي

19 فإن $p^{16} - 1$ يقبل القسمة على 16320 .

132 برهن أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير

المعدومة a ، n ، P و q يكون العدد $a^{4p+n} - a^{4q+n}$

يقبل القسمة على 30 .

133 الهدف من التمرين هو برهان الخاصية التالية : *

إذا كتب عدد N على الشكل $N = a^2 + b^2$ مع a و b

عددين طبيعيين أوليين فيما بينهما فإن كل قاسم أولي فردي

للعدد N يكون من الشكل $4n + 1$ مع n عدد طبيعي . *

ولهذا نبرهن بالخلف ، ونفترض أن N يقبل القسمة على

عدد أولي p من الشكل $4n + 3$ مع n عدد طبيعي .

نضع $m = 2n + 1$. أحسب a^{2m} و b^{2m} بالترديد p ثم

استنتج .

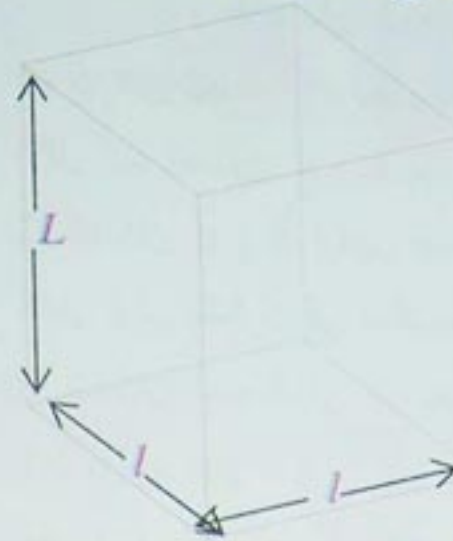
134 أ — حل إلى جداء عوامل أولية العدد 157563 .

ب — برهن أن $2^6 \equiv 1 [9]$ و $2^6 \equiv 1 [7]$.

ج — برهن أن $2^{120} - 1$ يقبل القسمة على 157563 .

مسائل

135 (1) علبة B على شكل متوازي مستطيلات ، ضلع قاعدتها المربعة هو l ، والارتفاع L حيث $l < L$.



نريد ملئ العلبة B بمكعبات متقايسة ذات الحرف العدد الطبيعي غير المعدوم a . يجب أن تكون العلبة B مملوءة بدون ترك أي فراغ.

أ - في هذا السؤال نضع $L = 945$ و $l = 882$. ما هي أكبر قيمة ممكنة للعدد a ؟ وما هي القيم الممكنة للعدد a ؟
ب - في هذا السؤال ، حجم العلبة B هو $v = 77760$. علماً أن العدد 12 هو أكبر قيمة للعدد a التي تكون من أجلها العلبة B مملوءة . برهن أنه توجد بالضبط علتين B مطلوب إعطاء بعداهما .

(2) علبة شكلها مكعب حرفه العدد الطبيعي غير المعدوم c ، نريد ملئها بالعلب B بدون ترك أي فراغ .
أ - في هذا السؤال نضع $L = 945$ و $l = 882$. ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد c ؟

ماهي مجموعة القيم الممكنة للعدد c ؟
ب - في هذا السؤال ، حجم العلبة B هو $v = 15435$. علماً أن أصغر حرف ممكن للعلبة C هو 105 ، ما هما البعدان L و l للعلبة B ؟

136 **بكالوريا** الحلول الناطقة لمعادلة من الدرجة الثالثة لتكن المعادلة (1) ذات المجهول العدد الناطق x :
 $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ مع u و v عددين صحيحين .

(1) نفترض أن $\frac{14}{39}$ هو حل للمعادلة (1) .

أ - بين أن العددين u و v يحققان العلاقة :
 $14u + 39v = 1129$

ب - استعمل خوارزمية أقليدس ، لإيجاد ثنائية (x, y) من الأعداد الصحيحة تحقق المعادلة $14x + 39y = 1$.

تحقق من أن $(-25, 9)$ هي حل لهذه المعادلة .

ج - استنتج ثنائية (u_0, v_0) حل خاص للمعادلة

$$14u + 39v = 1129 .$$

د - من بين الحلول (u, v) للمعادلة السابقة ، عين الحل الذي يكون فيه u أصغر عدد طبيعي ممكن .

(2) أ - حلل إلى جداء عوامل أولية كل من العددين 78 و 14 . استنتج مجموعة القواسم الموجبة للعدد 78 ثم للعدد 14 .

ب - ليكن $\frac{P}{Q}$ حل ناطق للمعادلة (1) .

برهن أنه إذا كان P و Q أوليين فيما بينهما فإن P يقسم 14 و Q يقسم 78 .

ج - استنتج عدد الأعداد الناطقة غير الصحيحة التي تكون حلولاً للمعادلة (1) وأكتب من بين هذه الحلول ، مجموعة الحلول التي تكون موجبة .

137 نعتبر المتتاليتين (x_n) و (y_n) حدودهما أعداد

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

(1) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n = 2^{n+1} + 1$.

(2) أ - أحسب $p \gcd(x_8, x_9)$ ثم $p \gcd(x_{2002}, x_{2003})$.
ما القول عن العددين x_8 و x_9 وكذلك عن العددين x_{2002} و x_{2003} ؟

ب - هل العددين x_n و x_{n+1} أوليين فيما بينهما من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؟

(3) أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$2x_n - y_n = 5$$

ب - عبر عن y_n بدلالة n .

ج - أدرس حسب قيم p ، باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^p على 5 .

د - نضع من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$d_n = p \gcd(x_n, y_n)$$

برهن أن $d_n = 1$ أو $d_n = 5$ ؛ استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $p \gcd(x_n, y_n) = 1$.

138 كل سؤال يتضمن ثلاث اختيارات من بينها اختيار

واحد صحيح ، عینه مبررا إجابتك .

a و b عدنان طبيعيان غير معدومين .

(1) إذا كان $a+b$ و $a-b$ أوليين فيما بينهما فإن a و b أوليان فيما بينهما .

في أي حالة تكون هذه الجملة صحيحة ؟

أ - من أجل كل ثنائية (a, b) .

ب - إذا كان a و b عددين زوجيين .

ج - إذا كان a و b من شفتين مختلفتين .

(2) عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 حيث :

$$3a + 4b = d$$

$$p \gcd(a, b) = d$$

$$p \gcd(a, b) = d$$

$$p \gcd(a, b) = d$$

(3) العدد الطبيعي N يحقق $N = 7a + 2$ و $N = 11b + 3$.

باقي القسمة الأقلدية للعدد N على 77 هو :

$$19 \quad \text{ب} - 6 \quad \text{ج} - 58$$

$$n = 2a(2a+2)(2a+4)$$

يكون العدد n قابلا للقسمة على 77 من أجل :

بعض القيم للعدد a . ب - كل عدد طبيعي a .

ج - a أولي .

$$242^{10} \equiv 1[11]$$

$$7^{14} \equiv 1[15]$$

$$18^{22} \equiv 1[23]$$

139 إقترح واحد صحيح ، فما هو ؟

(1) من أجل كل ثنائية من الأعداد الطبيعية (a, b) ، إذا

$$ab = ppcm(a, b) \text{ فإن } \gcd(a, b) = 1$$

(2) إذا كان $ppcm(a, b)$ عدد زوجي فإن a و b من

شفتين مختلفتين .

(3) جداء عددين متميزين وأوليين فيما بينهما هو

مضاعفهما المشترك الأصغر .

140 في كل من العبارات التالية برر صحتها أو خطئها .

a و b عدنان طبيعيان غير معدومين .

(1) إذا كان الجداء ab يقبل القسمة على 12 فإن على

الأقل أحد العددين a و b يقبل القسمة على 12 .

(2) إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإنه لا يوجد أي

عامل أولي مشترك في تحليلهما إلى جداء عوامل أولية .

(3) إذا كان العدد الولي p يقسم a و b فإن p^2 يقسم

$$ppcm(a, b)$$

(4) إذا كان 5 يقسم a^2 فإن 5 يقسم a .

141 ما هو اختيارك الصحيح ؟

(1) من أجل a عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 ، a^2

و a^3 ليسا أوليين فيما بينهما .

(2) المعادلة $11x - 19y = 1$ لا تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

(3) إذا كان 2 قاسما للعدد $7n$ مع n عدد صحيح فإن

n يكون عددا زوجيا .

(4) القاسم المشترك الأكبر لعددين زوجيين متتاليين هو 4 .

(5) إذا كان a و b عددين طبيعيين يحققان $3a + 5b = 6$

$$\gcd(a, b) = 6$$

(6) إذا كان 6 يقسم a و 10 يقسم b فإن 60 يقسم

$$ppcm(a, b)$$

(7) إذا كان a و b عددين طبيعيين يحققان $7a + 8b = 1$ ،

فإن a و b أوليان فيما بينهما .

142 بكالوريا برر صحة أو خطأ كل من الجمل التالية:

أ - إذا قابل عدد القسمة على 4 فيكون قابلا للقسمة على 8 .

ب - إذا قبل عدد القسمة على 2 و 3 فيكون قابلا للقسمة

على 6 .

ج - إذا قبل عدد القسمة على 4 و 6 فيكون قابلا للقسمة

على 24 .

د - إذا كان العدنان الطبيعيان a و b أوليين فيما بينهما فإن

$a+b$ و $a-b$ يكونا أوليان فيما بينهما .

هـ - إذا كان العدنان الطبيعيان a و b أوليين فيما بينهما

فإن $2a+b$ و $3a+2b$ يكونان أوليان فيما بينهما .

الكفاءات المستهدفة

- إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة.
- استعمال خواص مرافق عدد مركب.
- حساب الطويلة وعمدة لعدد مركب غير معدوم.
- الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلي و العكس.
- التعبير عن خواص لأشكال هندسية باستعمال الأعداد المركبة.
- توظيف خواص الطويلة والعمدة لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة.
- توظيف دستور موافر لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة.
- حل معادلات من الدرجة الثانية. و حل معادلات يؤول حلها إلى حل معادلة من الدرجة الثانية.
- تعيين الكتابة المركبة للتحويلات المألوفة (الانسحاب، التحاكي، الدوران). والتعرف عن تحويل انطلاقا من كتابته المركبة.
- حل مسائل هندسية تتطلب استعمال انسحابات، تحاكيات أو دورانات بواسطة الأعداد المركبة.
- توظيف الأعداد المركبة لبرهان خواص الانسحاب، الدوران والتحاكي.



Abraham de Moivre

أبراهام دي موافر :ولد عام 1667م عالم في الرياضيات أضاف إضافات هامة في حساب المثلثات وقانون الاحتمالات وهناك ثلاث نظريات رياضية تحمل اسمه. توفي عام 1754م.

« **أبراهام دي موافر** » من أصدقاء « **اسحاق نيوتن** »، حيث نشر على التوالي سنة (1718)، (1738)، (1756) مساهماته في الاحتمال ضمن كتابه في المصادفة « **مبدأ القرمز** ».

في سنة 1707م. اكتشف « **أبراهام دي موافر** » « **دستوره الشهير** :

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

نشاط أول الإحداثيات القطبية .

دراسة مثال

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

A و B النقطتان من المستوي التي إحداثياتها القطبية $\left(2, \frac{p}{4}\right)$ و $\left(\frac{1}{2}, \frac{2p}{3}\right)$ على الترتيب في المعلم $(O; \vec{i})$.

- (1) أنشئ النقطتين A و B .
- (2) عين قيسا للزاوية $(\vec{OA}, \vec{OB})$.
- (3) عين الإحداثيات الديكارتية للنقطتين A و B .
- (4) نظيرة A' بالنسبة إلى O مبدأ المعلم . عين الإحداثيات الديكارتية والقطبية للنقطة A' .
- (5) نظيرة B' بالنسبة إلى حامل محور الفواصل . عين الإحداثيات الديكارتية والقطبية للنقطة B' .
- (6) نظيرة B'' بالنسبة إلى حامل محور الترتيب . عين الإحداثيات الديكارتية والقطبية للنقطة B'' .

الحالة العامة

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

M نقطة من المستوي تختلف عن O إحداثياتها القطبية (r, q) في المعلم $(O; \vec{i})$.

- (1) عين شرطاً على r كي تكون النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي نصف قطرها 3.
- (2) عين شرطاً على q كي تكون النقطة M تنتمي إلى حامل محور الترتيب.
- (3) عين شرطاً على q كي تكون النقطة M تنتمي إلى حامل محور الفواصل.
- (4) عين شرطاً على q كي تكون النقطة M تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y = x$.

نشاط ثان مثال بومبيلي (Bombelli) .

الهدف من هذا النشاط هو حل المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : (1) $x^3 = 15x + 4$

(1) أثبت أن $a + b$ حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا : (2) $a^3 + b^3 + 3(ab - 5)(a + b) - 4 = 0$

(2) ما هي القيمة التي يجب إعطاؤها للعدد ab حتى نكتب المعادلة (2) على الشكل $a^3 + b^3 = 4$ ؟

ما هي قيمة $a^3 b^3$ في هذه الحالة ؟

(3) تأكد أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $(x - a^3)(x - b^3) = x^2 - 4x + 125$.

(4) نعتبر المعادلة $x^2 - 4x + 125 = 0$... (3)

تأكد أن هذه المعادلة لا تقبل حلولاً حقيقية .

(5) نتخيل عدد نرسم له " i " حيث $i^2 = -1$.

أكتب حلول المعادلة (3) في هذه الحالة .

(6) أحسب $(2 - i)^3$ و $(2 + i)^3$ ، استنتج حلاً حقيقياً للمعادلة (1) .

(7) عين حلول المعادلة (1) .



Rafael Bombelli

1526 - 1572

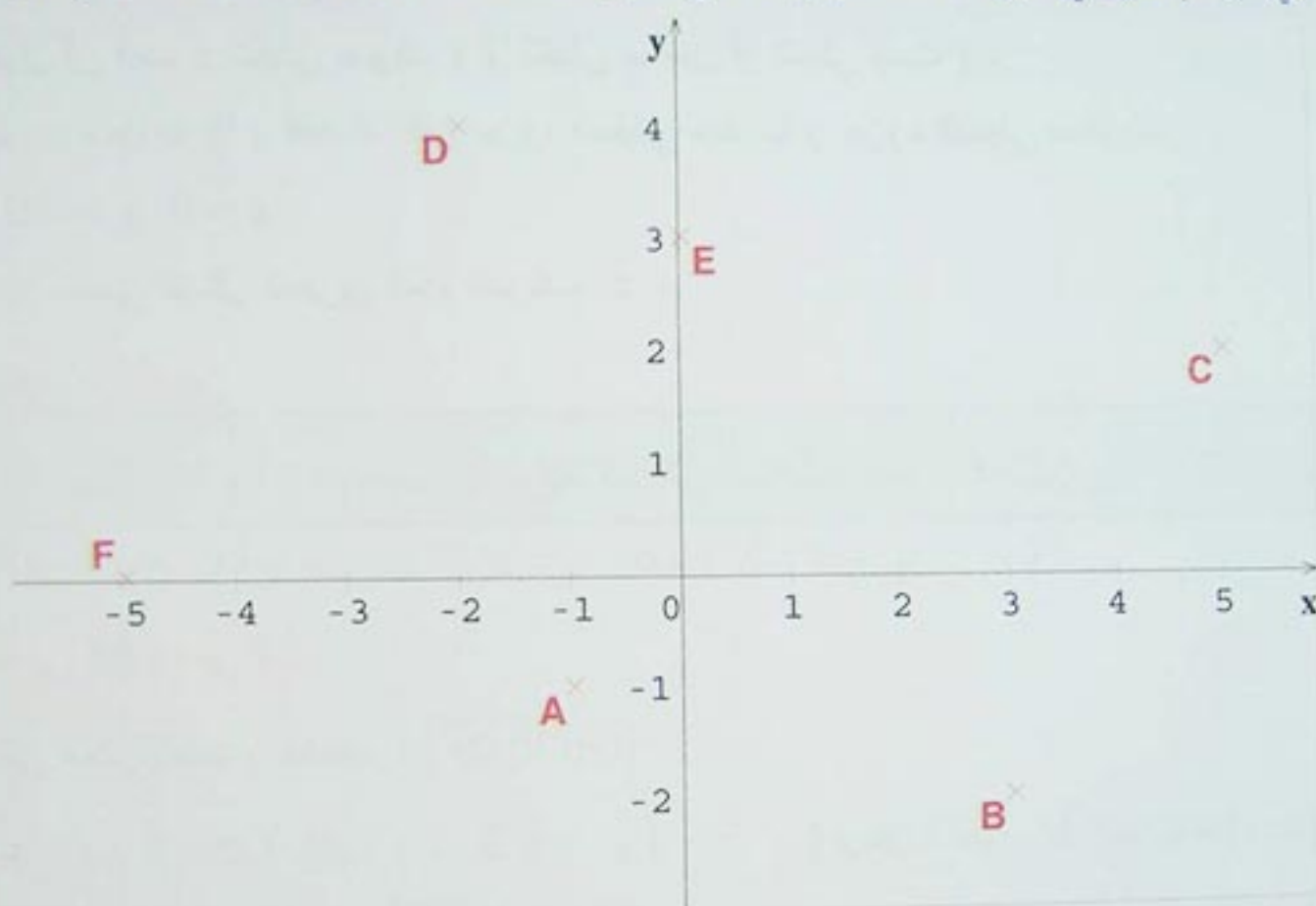
نشاط ثالث

تقديم هندسي للأعداد المركبة.

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

نقبل أن محور الفواصل يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية ، وعليه العدد الحقيقي x تمثله النقطة P بالإحداثيين $(x; 0)$.
نقبل أن كل نقطة أخرى من المستوي لا تنتمي إلى محور الفواصل تمثل عددا وهذا العدد غير حقيقي و نسميه عددا مركبا .

و هكذا النقطة J بالإحداثيين $(0; 1)$ تمثل العدد المركب i ، والنقطة Q بالإحداثيين $(0; y)$ تمثل العدد المركب iy .
وبصفة عامة النقطة M بالإحداثيين $(x; y)$ تمثل العدد المركب $x + iy$ الذي يرمز له z .
1. في الرسم الموالي عين الأعداد المركبة التي تمثلها النقط A, B, C, D, E, F .



2. مثل النقطة G حيث :

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

ما هو العدد المركب المرفق بالنقطة G ؟

3. مثل النقطة H حيث :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$$

ما هو العدد المركب المرفق بالنقطة H ؟

4. مثل النقطة K حيث :

$$\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

ما هو العدد المركب المرفق بالنقطة K ؟

5. مثل النقط R, S, T صور الأعداد المركبة $z_1 = 2 - i$ ، $z_2 = -\frac{1}{2} - 3i$ و $z_3 = -7i$ على الترتيب.

١. الأعداد المركبة .

1. تعريف .

تعريف: نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z = x + iy$ حيث x و y عدنان حقيقيان و $i^2 = -1$

ملاحظات و ترميز:

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ: $\mathbb{C}$.
- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ، و نرمز $\text{Re}(z)$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ، و نرمز $\text{Im}(z)$.
- إذا كان $y = 0$ نقول أن العدد z حقيقي .
- إذا كان $x = 0$ نقول أن العدد z تخيلي صرف (أو تخيلي محض أو تخيلي بحت) .
- يكون العدد المركب z معدوما إذا و فقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما و جزؤه التخيلي معدوما .
- أي $z = 0$ يعني $x = 0$ و $y = 0$.
- الكتابة $z = x + iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z .

2. تساوي عددين مركبين .

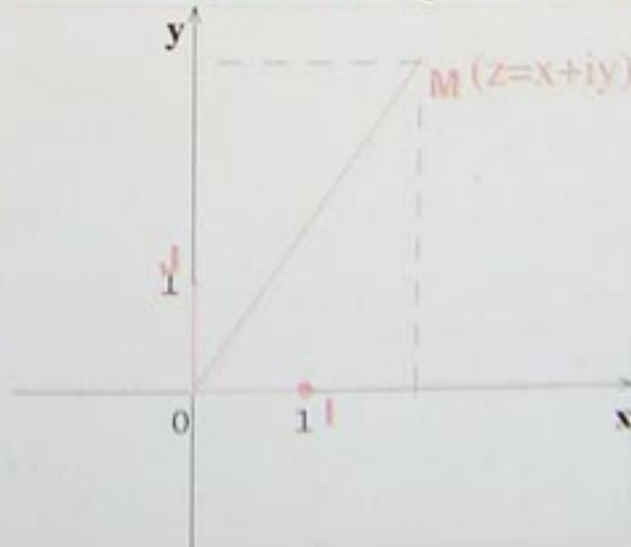
تعريف: يكون عدنان مركبان z و z' متساويين إذا و فقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي .

نصع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$: $z = z'$ معناه $x = x'$ و $y = y'$

3. التمثيل الهندسي لعدد مركب .

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

- إلى كل عدد مركب $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ ، $y \in \mathbb{R}$ و $i^2 = -1$) نرفق النقطة M إحداثياتها $(x; y)$ ، النقطة M تسمى صورة العدد المركب z و الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة العدد المركب z .



- كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z = x + iy$ ، نقول أن z لاحقة النقطة M و الشعاع $\overrightarrow{OM}$.
- محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي ، لأن الأعداد الحقيقية هي لواحق نقط محور الفواصل .
- محور التراتيب يسمى المحور التخيلي لأن كل عدد تخيلي صرف هو لاحقة نقطة من محور التراتيب .
- المستوي يسمى المستوي المركب .

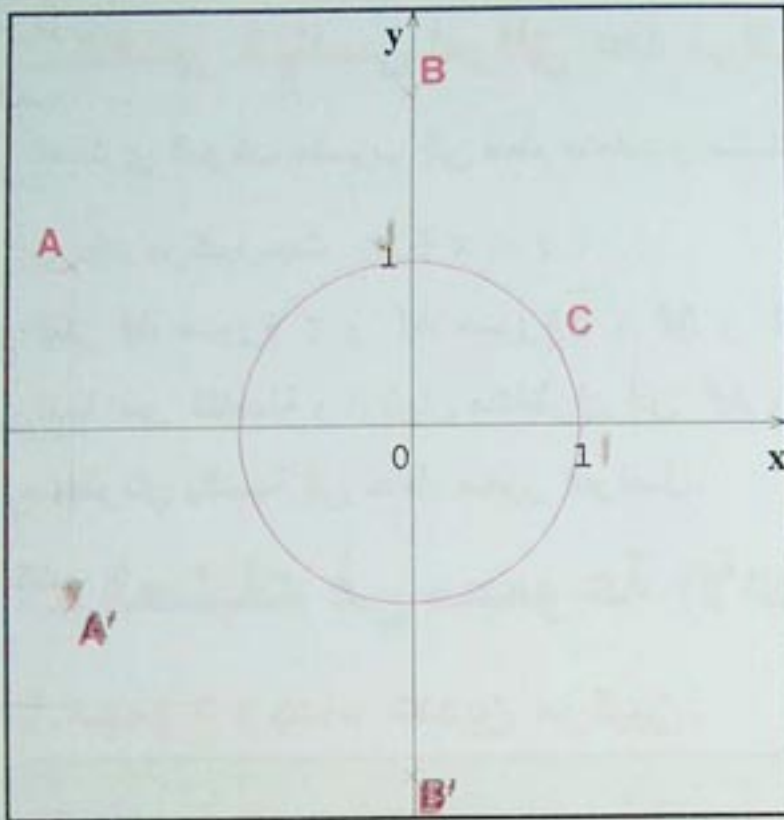
تمرين محلول 1: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

لتكن النقط A, B, C من المستوي التي لواحقها $-2+i, 2i, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ على الترتيب.

(1) أنشئ النقط A, B, C في المعلم $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

(2) عين لاحقة النقطة B' نظيرة B بالنسبة إلى O . أنشئ B' .

(3) عين لاحقة النقطة A' نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل، ثم عين لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AA'}$. أنشئ A' .



الحل: (1) صورة العدد $-2+i$ إذن $A(-2;1)$.

B صورة العدد $2i$ إذن $B(0;2)$.

C صورته العدد $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ إذن $C(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$.

لإنشاء النقطة C يمكن الملاحظة أنها تنتمي إلى الدائرة

التي مركزها O و نصف قطرها 1 و ترتيبها $\frac{1}{2}$.

(2) B' نظيرة B بالنسبة إلى O إذن $\overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OB}$.

ومن $B'(0;-2)$ و لاحقة B' هي $-2i$.

(3) A' نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل إذن A'

و A لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن $A'(-2;-1)$

و لاحقة A' هي $-2-i$. $\overrightarrow{AA'}(0;-2)$ و منه لاحقة $\overrightarrow{AA'}$ هي $-2i$.

تمرين محلول 2: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. x و y عدنان حقيقيان.

لتكن المجموعة (S) مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي حيث $z = x^2 + y(1+i) - i$.

عين ثم أنشئ المجموعة (S) في الحالتين الآتيتين.

(1) z عدد حقيقي. (2) z عدد تخيلي صرف.

الحل: $z = x^2 + y + i(y-1)$.

(1) z عدد حقيقي إذا و فقط إذا كان $\text{Im}(z)$ أي $y-1=0$.

إذن المجموعة (S) في هذه الحالة هي المستقيم ذو المعادلة $y-1=0$.

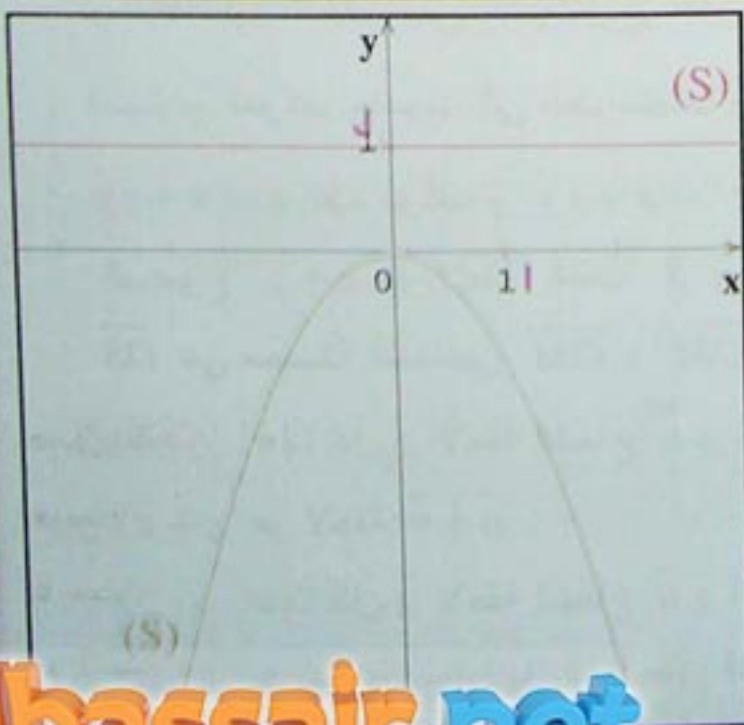
(S) مرسوم باللون الأحمر في هذه الحالة.

(2) z عدد تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان $\text{Re}(z)$

أي $x^2 + y = 0$. إذن المجموعة (S) في هذه الحالة هي القطع المكافئ

ذو المعادلة $y = -x^2$.

(S) مرسوم باللون الأخضر في هذه الحالة.



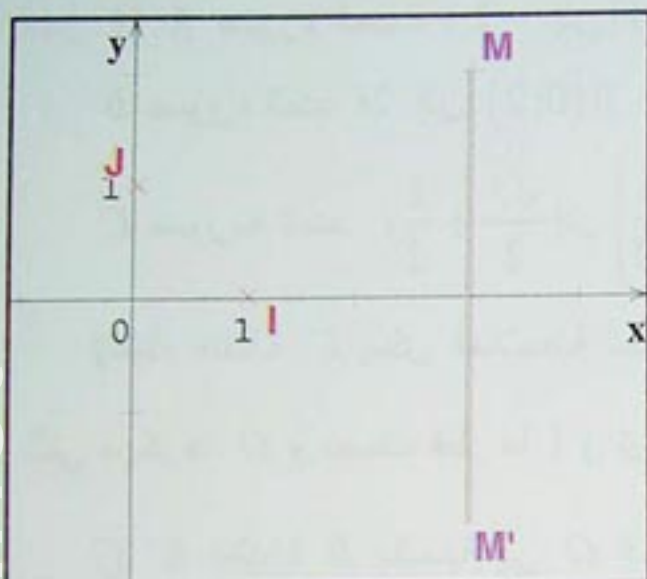
١. مرافق عدد مركب.

1. تعريف.

تعريف: z عدد مركب حيث $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$) .
العدد المركب $x - iy$ و الذي نرمز له $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z .

ملاحظة: للحصول على مرافق عدد مركب z ، نغير إشارة الجزء التخيلي.

أمثلة: $\bullet \overline{2+8i} = 2-8i$ ، $\bullet \overline{3-11i} = 3+11i$ ، $\bullet \overline{4i} = -4i$ ، $\bullet \overline{-2} = -2$.



2. التفسير الهندسي لمرافق عدد مركب.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
 $z = x + iy$ عدد مركب حيث
لتكن M صورة z و M' صورة $\bar{z}$ ، M و M'
لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن M و M'
متناظران بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

٢. العمليات في مجموعة الأعداد المركبة.

1. مجموع وجداء عددين مركبين.

تعريف: z عدد مركب حيث $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$) و $z' = x' + iy'$ عدد مركب حيث $z' = x' + iy'$ ($x' \in \mathbb{R}$ و $y' \in \mathbb{R}$) .

مجموع العددين z و z' هو العدد المركب $z + z' = x + x' + i(y + y')$.
جداء العددين z و z' هو العدد المركب $z \cdot z' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.

ملاحظة: قواعد الحساب المعروفة في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$.

أمثلة: $\bullet (2-i) + (-7+4i) = (2-7) + i(-1+4) = -5+3i$.
 $\bullet (3-2i)(-4-7i) = -12 - 21i + 8i + 14i^2 = -26 - 13i$.

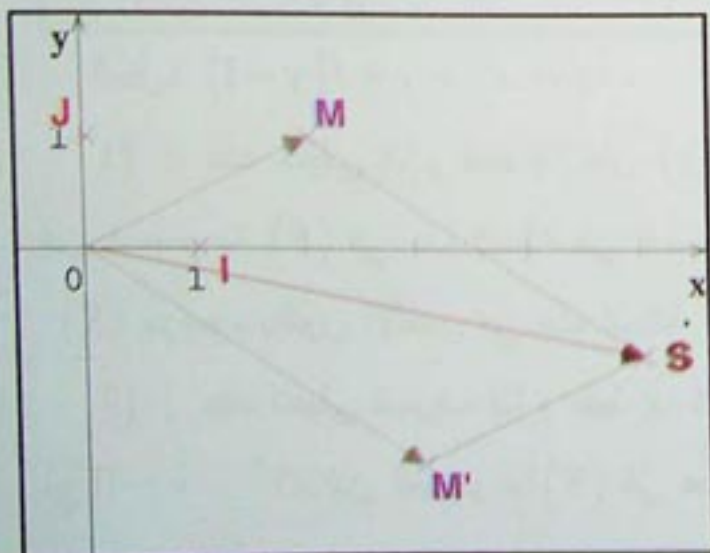
2. التفسير الهندسي لمجموع عددين مركبين.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
 $z = x + iy$ عدد مركب و $z' = x' + iy'$ عدد مركب .
المجموع $z + z'$ هو لاحقة النقطة S حيث $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.
 $\overrightarrow{OS}$ هي محصلة الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$.

ملاحظات: $\bullet$ إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان z' لاحقة الشعاع $\vec{v}$ ،
فإن $z + z'$ هو لاحقة $\vec{u} + \vec{v}$.

$\bullet$ إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان l عددا حقيقيا فإن z هو لاحقة $l\vec{u}$.

$\bullet$ شعاعان متساويان لهما نفس اللاحقة .



تمرين محلولة 1: أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

$$z_3 = (-7-2i)(6-4i)^2 \quad (3) , \quad z_2 = (-2+i\sqrt{3})(3-5i) + \left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+4i\right) \quad (2) , \quad z_1 = (1-i)^4 \quad (1)$$

الحل: (1) $z_1 = (1-i)^4$ و منه $z_1 = (1-i)^2(1-i)^2 = (-2i)(-2i) = 4i^2 = -4$ إذن $z_1 = -4$

(2) $z_2 = (-2+i\sqrt{3})(3-5i) + \left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+4i\right)$

و منه $z_2 = -6 + 3i\sqrt{3} + 10i - 5i^2\sqrt{3} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}i + 4i - 2i^2 = -\frac{5}{2} + 5\sqrt{3} + \left(\frac{53}{4} + 3\sqrt{3}\right)i$ إذن $z_2 = -\frac{5}{2} + 5\sqrt{3} + \left(\frac{53}{4} + 3\sqrt{3}\right)i$

(3) $z_3 = (-7-2i)(6-4i)^2$ و منه $z_3 = (-7-2i)(36-48i+16i^2) = (-7-2i)(20-48i)$

إذن $z_3 = -140 + 336i - 40i + 96i^2 = -236 + 296i$

تمرين محلولة 2: أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

$$z_3 = \frac{3+2i}{(1+i)(-6-5i)} \quad (3) , \quad z_2 = \frac{-7+4i}{4-7i} \quad (2) , \quad z_1 = \frac{5}{1-2i} \quad (1)$$

الحل: (1) $z_1 = \frac{5}{1-2i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$$z_1 = \frac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5(1+2i)}{1-4i^2} = \frac{5(1+2i)}{5} = 1+2i$$
 أي $z_1 = 1+2i$

(2) $z_2 = \frac{-7+4i}{4-7i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$$z_2 = \frac{(-7+4i)(4+7i)}{(4-7i)(4+7i)} = \frac{-28+16i-49i+28i^2}{16+49} = \frac{-56-33i}{65} = -\frac{56}{65} - \frac{33}{65}i$$
 أي $z_2 = -\frac{56}{65} - \frac{33}{65}i$

(3) $z_3 = \frac{3+2i}{(1+i)(-6-5i)}$ نقوم أولاً بكتابة المقام على الشكل الجبري :

$$z_3 = \frac{3+2i}{-6-6i-5i-5i^2} = \frac{3+2i}{-1-11i}$$
 بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$$z_3 = \frac{(3+2i)(-1+11i)}{(-1-11i)(-1+11i)} = \frac{-3+33i-2i+22i^2}{1+121} = \frac{-25+31i}{122} = -\frac{25}{122} + \frac{31}{122}i$$
 أي $z_3 = -\frac{25}{122} + \frac{31}{122}i$

تمرين محلولة 3: n عدد طبيعي غير معدوم .

(1) أكتب على الشكل الجبري كل من : $i^8, i^7, i^6, i^5, i^4, i^3$.

(2) ناقش تبعا لقيم n كتابة i^n على الشكل الجبري .

الحل: (1) $i^8 = 1, i^7 = -i, i^6 = -1, i^5 = i^4 \times i = i, i^4 = i^2 \times i^2 = 1, i^3 = i^2 \times i = -i$

(2) نلاحظ أن $i^4 = 1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k : $i^{4k} = 1$.

كذلك : $i^{4k+1} = i^{4k} \times i = i$

$i^{4k+2} = i^{4k} \times i^2 = -1$

$i^{4k+3} = i^{4k} \times i^3 = -i$

كل عدد طبيعي n يكتب على أحد الأشكال التالية : $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$

3. لاحقة شعاع ؛ لاحقة مرجح .

خاصية: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

A و B نقطتان من المستوي ، z_A لاحقة A و z_B لاحقة B .

• $z_B - z_A$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

• a و b عدنان حقيقيان حيث $a + b \neq 0$ ، G مرجح الجملة $\{(A, a); (B, b)\}$ ، $\frac{az_A + bz_B}{a + b}$ هي

لاحقة النقطة G .

البرهان: مباشر لأن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OG} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{OB}$.

ملاحظة: تستعمل نفس الطريقة في حساب لاحقة مرجح عدة نقط .

4. مقلوب عدد مركب .

مبرهنة: كل عدد مركب غير معدوم z له مقلوب في $\mathbb{C}$ يرمز له $\frac{1}{z}$.

البرهان: ليكن z عددا مركبا غير معدوم يوجد عدد مركب z' وحيد حيث $zz' = 1$.

بوضع $z = x + iy$ نحصل على $z' = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{(-y)}{x^2 + y^2}$.

5. خواص مرافق عدد مركب .

خواص مباشرة من التعريف:

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad \bullet$$

$$\overline{\bar{z}} = z \quad \bullet$$

$$z \bar{z} = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 \quad \bullet$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) \quad \bullet$$

المرافق و العمليات: z عدد مركب و مرافقه $\bar{z}$ ، z' عدد مركب و مرافقه $\bar{z}'$.

$$(n \in \mathbb{N}^*) \cdot \overline{z^n} = \bar{z}^n \quad \bullet$$

$$\overline{z z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}' \quad \bullet$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad \bullet$$

$$\bullet \left(\frac{z}{z'} \right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad \bullet \text{ مع } z' \neq 0$$

$$\bullet \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{\bar{z}} \quad \bullet \text{ مع } z \neq 0$$

البرهان: z و z' عدنان مركبان حيث $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$.

$$\bullet \overline{z + z'} = \overline{x + x' + (y + y')i} = x + x' - (y + y')i \quad \bullet \overline{z + z'} = x - iy + x' - iy' \text{ أي } \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\bullet \overline{z \cdot z'} = \overline{xx' - yy' + (xy' + x'y)i} = xx' - yy' - (xy' + x'y)i$$

$$\bullet \overline{z \cdot z'} = \overline{(x - iy)(x' - iy')} = (x - iy)(x' - iy') \quad \bullet \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

$$\bullet \overline{z^n} = \bar{z}^n \quad \bullet \text{ نستعمل الخاصية } \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}' \text{ و الاستدلال بالتراجع.}$$

• للبرهان على $\left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{\bar{z}}$ نحسب $\left(\frac{1}{z} \right) \bar{z}$ و نقارن . نفس الطريقة بالنسبة لـ $\left(\frac{z}{z'} \right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.

تمرين محلولة 1: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z في الحالتين الآتيتين :

$$(1) \quad (2-3i)z - 26 = 0$$

$$(2) \quad z - 21i = -14 + i\frac{\sqrt{3}}{2}z$$

الحل: (1) $(2-3i)z - 26 = 0$ أي $(2-3i)z = 26$ وبالتالي $z = \frac{26}{2-3i}$

$$z = \frac{26(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = 4 + 6i$$

بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على

$$S = \{4 + 6i\}$$

لتكن مجموعة الحلول

$$(2) \quad z - 21i = -14 + i\frac{\sqrt{3}}{2}z$$

نضرب الطرفين في 2 نحصل على $2z - 42i = -28 + i\sqrt{3}z$

$$2z - i\sqrt{3}z = -28 + 42i$$

$$z = \frac{-28 + 42i}{2 - i\sqrt{3}}$$

وبالتالي

$$z = \frac{(-28 + 42i)(2 + i\sqrt{3})}{(2 - i\sqrt{3})(2 + i\sqrt{3})}$$

بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على

$$z = (-4 + 6i)(2 + i\sqrt{3}) = -8 - 6\sqrt{3} + (12 - 4\sqrt{3})i$$

$$S' = \{-8 - 6\sqrt{3} + (12 - 4\sqrt{3})i\}$$

لتكن مجموعة الحلول

تمرين محلولة 2: ليكن كثير الحدود P للمتغير المركب z المعروف كما يلي :

$$P(z) = z^3 + z^2 - 2$$

$$(1) \quad \overline{P(z)} = P(\overline{z})$$

أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z :

$$(2) \quad \text{أحسب } P(1) \text{ و } P(-1-i)$$

$$(3) \quad \text{استنتج جذرا آخر لـ } P(z)$$

$$\text{الحل: (1) } \overline{P(z)} = \overline{z^3 + z^2 - 2} = \overline{z}^3 + \overline{z}^2 - \overline{2} = \overline{z}^3 + \overline{z}^2 - 2 = P(\overline{z})$$

بتطبيق خاصية المجموع .

$$\overline{P(z)} = \overline{z}^3 + \overline{z}^2 - 2 = P(\overline{z})$$

بتطبيق خاصية الأس .

$$\overline{P(z)} = (\overline{z})^3 + (\overline{z})^2 - 2 = P(\overline{z})$$

إذن $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$

$$(2) \quad P(1) = 0$$

$$P(-1-i) = (-1-i)^3 + (-1-i)^2 - 2$$

$$P(-1-i) = 2i(-1-i) + 2i - 2 = 0$$

$$(3) \quad P(-1-i) = 0 \text{ و } \overline{P(-1-i)} = 0 \text{ وبالتالي } P(-1+i) = 0$$

أي $P(-1+i) = 0$

$$\text{إذن } -1+i \text{ جذر لـ } P(z)$$

١. طولية و عمدة عدد مركب.

1. طولية عدد مركب.

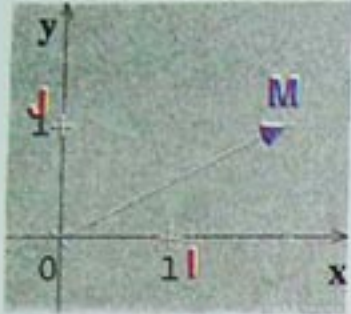
تعريف: z عدد مركب حيث: $z = x + iy$ (x و y عدنان حقيقيان).

نسمي طولية العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$ حيث $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

أمثلة: $|2 + 8i| = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$ ، $|-4 - 3i| = \sqrt{16 + 9} = 5$ ، $|-7i| = \sqrt{49} = 7$

ملاحظات: • إذا كان z عددا حقيقيا فإن طولية z هي القيمة المطلقة للعدد z .

• $z = 0$ يعني $|z| = 0$ • $|z|^2 = x^2 + y^2$



التفسير الهندسي لطولية عدد مركب.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

z عدد مركب حيث $z = x + iy$ إذا كانت M صورة z فإن $OM = |z|$

خواص طولية عدد مركب.

خواص: من أجل كل عددين مركبين z و z'

• $|\overline{z}| = |z|$ • $|-z| = |z|$

• $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ • $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ مع $z' \neq 0$

• $|z^n| = |z|^n$ • $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (المتباينة الثلاثية).

البرهان: مباشر.

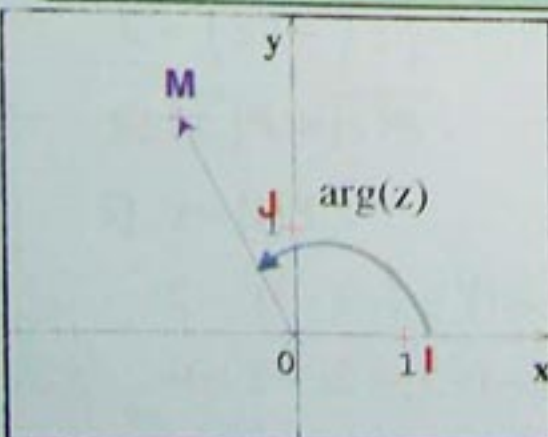
ملاحظة: A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب: $AB = |z_B - z_A|$.

2. عمدة عدد مركب غير معدوم.

تعريف: z عدد مركب غير معدوم حيث: $z = x + iy$ (x و y عدنان حقيقيان).

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ لتكن M صورة z .

نسمي عمدة العدد المركب z و نرمز $\arg(z)$ كل قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.



ملاحظات: • كل عدد مركب غير معدوم z له عدد غير منته من العمدة.

إذا كان q عمدة لـ z فإن $q + 2kp$ ($k \in \mathbb{Z}$) عمدة لـ z .

و نكتب $\arg(z) \equiv q[2p]$.

• A و B نقطتان لاحقتاهما z_B و z_A على الترتيب.

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg(z_B) - \arg(z_A)$ أي $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$

• $\arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB})$

تمرين محلول 1: عين طولية العدد المركب z في كل حالة من الحالات الآتية.

$$z = \left(\frac{(1-i)^6}{(-8-6i)^2} \right)^3 \quad (4) \quad , \quad z = (-3+4i)^4 \quad (3) \quad , \quad z = \frac{3-4i}{\sqrt{3}-i} \quad (2) \quad , \quad z = (2+i)(-5+3i) \quad (1)$$

الحل: (1) $z = (2+i)(-5+3i)$

$$|z| = \sqrt{5} \times \sqrt{34} = \sqrt{170} \quad \text{أي} \quad |z| = |(2+i)(-5+3i)| = |2+i| |-5+3i|$$

$$z = \frac{3-4i}{\sqrt{3}-i} \quad (2)$$

$$|z| = \frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{3+1}} = \frac{5}{2} \quad \text{أي} \quad |z| = \left| \frac{3-4i}{\sqrt{3}-i} \right| = \frac{|3-4i|}{|\sqrt{3}-i|}$$

$$z = (-3+4i)^4 \quad (3)$$

$$|z| = (\sqrt{9+16})^4 = 5^4 = 625 \quad \text{أي} \quad |z| = |(-3+4i)^4| = |-3+4i|^4$$

$$z = \left(\frac{(1-i)^6}{(-8-6i)^2} \right)^3 \quad (4)$$

$$|z| = \left(\frac{8}{100} \right)^3 = \frac{8}{15625} \quad \text{أي} \quad |z| = \left| \left(\frac{(1-i)^6}{(-8-6i)^2} \right)^3 \right| = \left(\frac{|(1-i)^6|}{|(-8-6i)^2|} \right)^3 = \left(\frac{|(1-i)|^6}{|(-8-6i)|^2} \right)^3$$

تمرين محلول 2: z عدد مركب حيث $z = x+iy$ و M صورته في المستوي المركب منسوب إلى معلم

متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

$$a = |(1-i)z - 2i| \quad \text{نضع}$$

عين المجموعة (S) مجموعة النقط M من المستوي حتى يكون $a = 2$.

الحل: $a = 2$ يعني $|(1-i)z - 2i| = 2$ نعوض z بـ $x+iy$ نحصل على :

$$|x+iy - ix - i^2y - 2i| = 2 \quad \text{معناه} \quad |(1-i)(x+iy) - 2i| = 2$$

$$\text{أي} \quad |x+y+i(-x+y-2)| = 2 \quad \text{لنحسب} \quad |x+y+i(-x+y-2)|$$

$$|x+y+i(-x+y-2)| = \sqrt{(x+y)^2 + (-x+y-2)^2}$$

$$\text{أي} \quad |x+y+i(-x+y-2)| = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 4}$$

$$\text{أي} \quad |x+y+i(-x+y-2)| = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 4}$$

$$\text{و بالتالي} \quad \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 4} = 2 \quad \text{نربع الطرفين} \quad 2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 4 = 4$$

$$\text{أي} \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

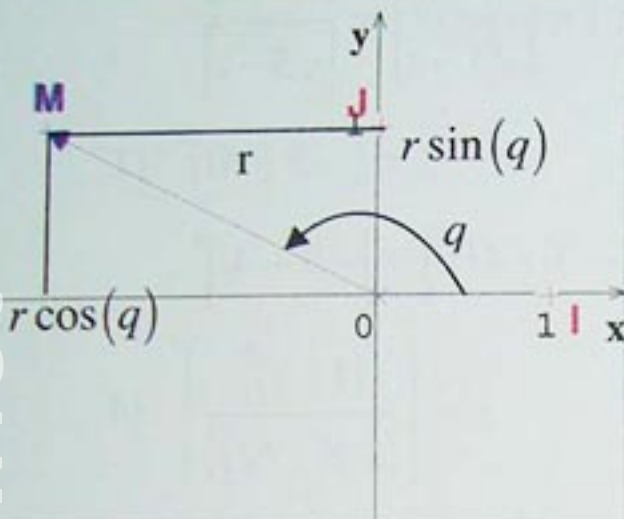
إذن المجموعة (S) هي الدائرة التي مركزها $w(-1,1)$ و نصف قطرها $r = \sqrt{2}$

لـ الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم.

1. تعريف و خواص .

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. تعلم نقطة M بإحداثيها الديكارتية $(x; y)$ أو بإحداثيها القطبية $(r; q)$ $OM = r$ و $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = q$ ، و لدينا $x = r \cos(q)$ و $y = r \sin(q)$.

تعريف: z عدد مركب غير معدوم. العدد z يكتب على الشكل $z = r(\cos(q) + i \sin(q))$ حيث $r = |z|$ و $q = \arg(z)$. هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لـ z .



ملاحظة: • إذا كان $z = x + iy$ ، $\cos(q) = \frac{x}{r}$ و $\sin(q) = \frac{y}{r}$.

خاصية: يكون عدنان مركبان مكتوبان على الشكل المثلثي متساويين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الطويلة وعمدتان متوافقتان بترديد $2p$.

خاصية: إذا كان $z = l(\cos(q) + i \sin(q))$ و كان $l > 0$ فإن $l = |z|$ و $q = \arg(z)$.

الخاصيتان تستنتج مباشرة من التعريف.

2. خواص عمدة عدد مركب غير معدوم.

خواص: z و z' عدنان مركبان غير معدومين.

$$\bullet \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad \bullet \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$n \in \mathbb{N}^* \bullet \arg(z^n) = n \arg(z)$$

البرهان: نضع $z = r(\cos(q) + i \sin(q))$ و $z' = r'(\cos(q') + i \sin(q'))$.

$$\bullet z \cdot z' = r r' [\cos(q) \cos(q') - \sin(q) \sin(q') + i(\sin(q) \cos(q') + \sin(q') \cos(q))]$$

بتطبيق دساتير الجمع: نحصل على $z \cdot z' = r r' (\cos(q + q') + i \sin(q + q'))$

$$\text{إن} \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\bullet \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} \left[\frac{(\cos(q) \cos(q') + \sin(q) \sin(q')) + i(\sin(q) \cos(q') - \sin(q') \cos(q))}{\cos^2(q) + \sin^2(q)} \right]$$

بتطبيق دساتير الجمع: نحصل على $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} (\cos(q - q') + i \sin(q - q'))$

$$\text{إن} \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

• للبرهان على الخاصية $\arg(z^n) = n \arg(z)$ نستعمل الخاصية $\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$ و الاستدلال بالتراجع.

تمرين محلول 1: عين الطويلة وعمدة للعدد z ثم أكتبه على الشكل المثلثي في الحالتين الآتيتين :

$$z = \sqrt{2} - i\sqrt{6} \quad (2)$$

$$z = 1 + i \quad (1)$$

الحل: (1) $z = 1 + i$. $|z| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. ليكن q عمدة لـ z .

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{p}{4}\right) + i \sin\left(\frac{p}{4}\right) \right) \text{ أي } z \text{ عمدة لـ } \frac{p}{4} \text{ ومنه } \sin(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \cos(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \quad z = \sqrt{2} - i\sqrt{6} \quad |z| = |\sqrt{2} - i\sqrt{6}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} . \text{ ليكن } q \text{ عمدة لـ } z$$

$$\sin(q) = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \cos(q) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ومنهم } \left(-\frac{p}{3}\right) \text{ عمدة لـ } z \text{ أي } z = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{p}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{p}{3}\right) \right)$$

تمرين محلول 2: ليكن العددان المركبان $Z_1 = (1+i)(-1-i\sqrt{3})$ و $Z_2 = \frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}$:

(1) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الجبري . (2) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل المثلثي .

$$\text{الحل: (1) } Z_1 = (1+i)(-1-i\sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3} + i(-1-\sqrt{3})$$

$$Z_2 = \frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(-1+i\sqrt{3})}{(-1-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})} = \frac{-1-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})}{4}$$

$$(2) \quad -1-i\sqrt{3} = 2 \left(\cos\left(\frac{4p}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4p}{3}\right) \right) , \quad 1+i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{p}{4}\right) + i \sin\left(\frac{p}{4}\right) \right)$$

$$Z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{p}{4} + \frac{4p}{3}\right) + i \sin\left(\frac{p}{4} + \frac{4p}{3}\right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{19p}{12}\right) + i \sin\left(\frac{19p}{12}\right) \right)$$

$$Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{p}{4} - \frac{4p}{3}\right) + i \sin\left(\frac{p}{4} - \frac{4p}{3}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(-\frac{13p}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{13p}{12}\right) \right)$$

تمرين محلول 3: في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ ، لتكن النقطة A ،

$$B \text{ و } C \text{ التي لواحقتها } z_A = -i\sqrt{3} , z_B = 3 + 2i\sqrt{3} , z_C = -3 + 2i\sqrt{3}$$

(1) أعط تفسيراً هندسياً لطويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$. (2) ما هي طبيعة المثلث ABC .

$$\text{الحل: (1) } \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(z_B - z_A) - \arg(z_C - z_A) \quad \bullet \bullet \bullet \quad \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC}$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

$$(2) \quad \arg\left(\frac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) . AB = AC \text{ ومنهم } \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \left|\frac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}}\right| = 1 = \frac{AB}{AC}$$

ومنهم $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{p}{3}$ إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

١. الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم.

1. الشكل الأسّي لعدد مركب طويلته 1.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ عدد مركب طويلته 1 و M_0 صورته، لتكن q عمدة لـ $z_0 = \cos(q) + i \sin(q)$ ، لتكن f الدالة التي بكل عدد حقيقي q ترفق العدد المركب الذي طويلته 1 و q عمدة له. أي $f(q) = \cos(q) + i \sin(q)$.

q و q' عدنان حقيقيان لنحسب $f(q+q')$ و $f(q) \cdot f(q')$.

$$f(q+q') = \cos(q+q') + i \sin(q+q')$$

$$f(q) \cdot f(q') = (\cos(q) + i \sin(q))(\cos(q') + i \sin(q'))$$

$$f(q+q') = (\cos(q)\cos(q') - \sin(q)\sin(q')) + i(\sin(q)\cos(q') + \sin(q')\cos(q))$$

$$f(q) \cdot f(q') = (\cos(q)\cos(q') - \sin(q)\sin(q')) + i(\sin(q)\cos(q') + \sin(q')\cos(q))$$

أي $f(q+q') = f(q) \cdot f(q')$ ونستنتج أن $f(q+q') = f(q) \cdot f(q')$.

بما أن الدالة الأسية تحول مجموع عددين إلى جداء صورتيهما تم التفكير في الترميز الأسّي للعدد z_0 .

نضع $z_0 = e^{iq}$.

تعريف: العدد المركب الذي طويلته 1 و q عمدة له يكتب e^{iq} . حيث $e^{iq} = \cos(q) + i \sin(q)$.

هذا الترميز يسمى ترميز أولر.

2. الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم.

تعريف: العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و q عمدة له يكتب $z = re^{iq}$.

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسّي للعدد المركب z .

3. قواعد الحساب على الشكل الأسّي.

خواص: q و q' عدنان حقيقيان.

$$\bullet \bullet \frac{e^{iq}}{e^{iq'}} = e^{i(q-q')}$$

$$\bullet \bullet e^{i(q+q')} = e^{iq} \cdot e^{iq'}$$

$$\bullet \bullet \overline{e^{iq}} = e^{-iq}$$

أمثلة: $z_1 = 1+i$ يكتب $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_1 = -1-i\sqrt{3}$ يكتب $z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$z_1 = 1-i$ يكتب $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$ ، $z_1 = -\sqrt{3}+i$ يكتب $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

4. دستور موافر.

خواص: z عدد مركب طويلته r و q عمدة له. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا:

$$(e^{iq})^n = e^{inq}$$

١. المعادلات من الدرجة الثانية.

1. تساوي عددين مركبين.

مبرهنة: (تقبل) يكون عددان مركبان z و z' متساويين إذا و فقط إذا كان لهما نفس الطويلة، نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

$$\begin{cases} |z| = |z'| \\ \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases} \text{ معناه } z = z'$$

2. الجذران التربيعيان لعدد مركب.

تعريف: w عدد مركب. يسمى حلا المعادلة $z^2 = w$ في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين للعدد w .

- أمثلة:**
- الجذران التربيعيان للعدد $3 - 4i$ هما $2 - i$ و $-2 + i$.
 - الجذران التربيعيان للعدد -9 هما $3i$ و $-3i$.

ملاحظة: كل عدد مركب له جذران تربيعيان متناظرين.

3. المعادلات من الدرجة الثانية.

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2 + bz + c = 0 \dots (1)$ حيث a, b, c أعداد مركبة و $a \neq 0$.

$$az^2 + bz + c = a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \text{ حيث } \Delta = b^2 - 4ac$$

أي يعود إلى تعيين الجذرين التربيعيين للعدد Δ . من مكتسبات السنوات الماضية تأتي المبرهنة

مبرهنة: لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2 + bz + c = 0$ حيث a, b, c أعداد مركبة و $a \neq 0$. $\Delta = b^2 - 4ac$ مميزها.

• إذا كان $\Delta = 0$ ، المعادلة تقبل حل مضاعف $z = -\frac{b}{2a}$.

• إذا كان $\Delta \neq 0$ ، المعادلة تقبل حلين متميزين:

$$z' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } z'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حيث w جذر تربيعي لـ Δ .

ملاحظة: إذا كانت z' و z'' حلي المعادلة فإن من أجل كل عدد مركب z :

$$az^2 + bz + c = a(z - z')(z - z'')$$

مثال: • حلي المعادلة $z^2 - z + 1 = 0$ هما $z' = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z'' = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

تمرين محلول: (1) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الجبري :

$$z_3 = 6e^{i\frac{2p}{3}} \quad \bullet \quad z_2 = 5e^{i\frac{p}{2}} \quad \bullet \quad z_1 = 8e^{-i\frac{p}{4}} \quad \bullet \quad z_0 = 2e^{i\frac{p}{3}}$$

(2) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الأسّي :

$$z_3 = (\sqrt{3} + i)^6 \quad \bullet \quad z_2 = (1 - i)^8 \quad \bullet \quad z_1 = -3 - 3i \quad \bullet \quad z_0 = -7i$$

الحل: (1) $\bullet z_0 = 2e^{i\frac{p}{3}} = 2 \left(\cos\left(\frac{p}{3}\right) + i \sin\left(\frac{p}{3}\right) \right)$

$\bullet z_0 = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$ أي

$\bullet z_1 = 8e^{-i\frac{p}{4}} = 8 \left(\cos\left(-\frac{p}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{p}{4}\right) \right)$

$\bullet z_1 = 8 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$ أي

$\bullet z_2 = 5e^{i\frac{p}{2}} = 5 \left(\cos\left(\frac{p}{2}\right) + i \sin\left(\frac{p}{2}\right) \right)$

$\bullet z_2 = 5(0 + i(1)) = 5i$ أي

$\bullet z_3 = 6e^{i\frac{2p}{3}} = 6 \left(\cos\left(\frac{2p}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2p}{3}\right) \right)$

$\bullet z_3 = 6 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -3 + 3i\sqrt{3}$ أي

$\bullet z_0 = -7i = 7e^{-i\frac{p}{2}} \quad (2)$

$\bullet z_1 = -3 - 3i = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5p}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5p}{4}\right) \right)$

$\bullet z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{5p}{4}}$ أي

$\bullet z_2 = (1 - i)^8 = \left(\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{p}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{p}{4}\right) \right) \right)^8$

$\bullet z_2 = \left(\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{p}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{p}{4}\right) \right) \right)^8 = \left(\sqrt{2} e^{-i\frac{p}{4}} \right)^8 = 16e^{-2ip}$ أي

$\bullet z_3 = (\sqrt{3} + i)^6 = \left(2 \left(\cos\left(\frac{p}{6}\right) + i \sin\left(\frac{p}{6}\right) \right) \right)^6$

$\bullet z_3 = 2^6 \left(\cos\left(\frac{p}{6}\right) + i \sin\left(\frac{p}{6}\right) \right)^6 = 64 \left(\cos\left(\frac{6p}{6}\right) + i \sin\left(\frac{6p}{6}\right) \right) = 64(\cos(p) + i \sin(p))$ أي

$\bullet z_3 = 64e^{ip}$ إذن

تمرين محلول 1: عين الجذرين التربيعيين للعدد $z = -8 + 6i$:

الحل: ليكن $w = x + iy$ جذرا تربيعيا لـ z . أي $z = w^2$.

$$w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$|z| = |-8 + 6i| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10 \quad , \quad |w^2| = |w|^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \quad \text{يعني } z = w^2 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = 3 \end{cases} \quad \text{معناه} \quad \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ y^2 = 10 - x^2 \\ xy = 3 \end{cases} \quad \text{أي}$$

أي $(x=1 \text{ و } y=3)$ أو $(x=-1 \text{ و } y=-3)$ لأن $xy > 0$

إذن $w = 1 + 3i$ أو $w = -1 - 3i$.

تمرين محلول 2: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول المركب z .

$$z^2 + (3 - 2i)z + 5 - 5i = 0$$

الحل: نحسب المميز : $\Delta = (3 - 2i)^2 - 4(1)(5 - 5i)$.

$$\Delta = 9 - 12i + 4i^2 - 20 + 20i = -15 + 8i$$

ليكن $w = x + iy$ جذرا تربيعيا لـ Δ .

$$w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$|\Delta| = |-15 + 8i| = \sqrt{(-15)^2 + 8^2} = 17 \quad , \quad |w^2| = |w|^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = -15 \quad \text{يعني } z = w^2 \\ 2xy = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 16 \\ xy = 4 \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ y^2 = 17 - x^2 \\ xy = 4 \end{cases} \quad \text{أي}$$

أي $(x=1 \text{ و } y=4)$ أو $(x=-1 \text{ و } y=-4)$ لأن $xy > 0$

إذن $w = 1 + 4i$ أو $w = -1 - 4i$.

نضع $\Delta = (1 + 4i)^2$.

$$z'' = \frac{-3 + 2i + 1 + 4i}{2} = -1 + 3i \quad \text{و} \quad z' = \frac{-3 + 2i - 1 - 4i}{2} = -2 - i$$

لـ تذكير حول التحويلات النقطية المألوفة

(1) الانسحاب .

تعريف: الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوى النقطي M' من المستوى حيث : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

خواص:

- الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو تحويل نقطي تقابلي و تحويله العكسي هو الانسحاب الذي شعاعه $(-\vec{u})$.
- الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل أية نقطة صامدة و الانسحاب الذي شعاعه $\vec{0}$ هو التحويل الثابت.
- الخاصية المميزة: صورة ثنائية (A, B) هي ثنائية (A', B') تحقق $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.
- الانسحاب تقايس.

(2) التحاكي.

تعريف: Ω نقطة ثابتة و k عدد حقيقي غير معدوم. التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوى النقطي M' من المستوى حيث : $\overrightarrow{\Omega M'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega M}$ $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

خواص:

- إذا اختلفت M عن Ω فإن M' تختلف عن Ω و النقط Ω ، M و M' على استقامة واحدة .
- $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$ يعني $\overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{k} \overrightarrow{\Omega M'}$ و نستنتج أن : التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هو تحويل نقطي تقابلي و تحويله العكسي هو التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته $\frac{1}{k}$.
- الخاصية المميزة: صورة ثنائية (A, B) بالتحاكي الذي مركزه w و نسبته k هي الثنائية (A', B') التي تحقق : $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{AB}$

• نلاحظ أنه إذا كان $|k| \neq 1$ فإن $A'B' \neq AB$ و بالتالي فإن التحاكي ليس تقايسا.

(3) الدوران

تعريف: w نقطة من المستوى الموجه و q عدد حقيقي

الدوران الذي مركزه Ω و زاويته q هو التحويل النقطي الذي يرفق النقطه Ω بنفسها و يرفق بكل نقطة M تختلف عن Ω النقطه M' حيث : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ و $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = q$

خواص:

- الدوران الذي مركزه Ω و زاويته غير معدومة له نقطة صامدة وحيدة هي المركز Ω .
- الدوران الذي مركزه w و زاويته q تحويل تقابلي و تحويله العكسي هو الدوران الذي مركزه w و زاويته $(-q)$.
- الخاصية المميزة: صورة كل ثنائية (A, B) بالدوران الذي مركزه w و زاويته q هي ثنائية (A', B') تحقق ما يلي : $A'B' = AB$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = q$ تبين هذه النتيجة أن الدوران تقايس.

تمرين محلولة 1: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

ليكن التحويل النقطي f الذي إلى كل نقطة $M(x, y)$ يرفق النقطة $M'(x', y')$ حيث $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$

أثبت أن التحويل f انسحاب.

الحل: لتكن $M(x, y)$ و $M'(x', y')$ نقطتان من المستوي.

ولدينا $\overrightarrow{MM'}(x' - x, y' - y)$ إذن $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ مع $\vec{u}(-1, 2)$ معناه $\begin{cases} x' - x = -1 \\ y' - y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$

إذن التحويل f هو انسحاب شعاعه $\vec{u}$.

تمرين محلولة 2: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

ليكن التحويل النقطي g الذي إلى كل نقطة $M(x, y)$ يرفق النقطة $M'(x', y')$ حيث $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - 4 \\ y' = -\frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$

أثبت أن التحويل g تحاك يطلب عناصره المميزة.

الحل: نعتبر النقطة $\omega(x, y)$ حيث هي صامدة بالتحويل g ومنه:

$$\omega\left(-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ إذن } \begin{cases} x = -\frac{8}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \frac{3}{2}x = -4 \\ \frac{3}{2}y = +1 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} x = -\frac{1}{2}x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$$

لتكن $M(x, y)$ و $M'(x', y')$ نقطتين من المستوي.

$$\begin{cases} x' + \frac{8}{3} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{8}{3}\right) \\ y' - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(y + \frac{2}{3}\right) \end{cases} \text{ ومعناه } \begin{cases} x' + \frac{8}{3} = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{3} \\ y' - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{3} \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - 4 \\ y' = -\frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$$

إذن $\overrightarrow{\omega M'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\omega M}$ وبالتالي g تحاك مركزه ω ونسبته $-\frac{1}{2}$.

تمرين محلولة 3: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

ليكن التحويل النقطي g الذي إلى كل نقطة $M(x, y)$ يرفق النقطة $M'(x', y')$ حيث $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

1. أثبت أن $OM = OM'$.

2. بين $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$.

3. ما هي طبيعة التحويل g ؟

الحل: 1. $OM' = x'^2 + y'^2 = y^2 + x^2 = OM$ ، $OM = x^2 + y^2$

2. $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ ، $\overrightarrow{OM'} = (x', y')$ ولدينا $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = xx' + yy' = -xy + yx = 0$ إذن $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$

3. g هو دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

١. الأعداد المركبة و التحويلات النقطية.

في كل ما يأتي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$
 f تحويل نقطي من المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث
 $z' = az + b$ مع $a \in \mathbb{R}^*$ أو $a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$. ونكتب $f(M) = M'$ يعني $z' = az + b$.

1. الحالة الأولى $a = 1$.

$f(M) = M'$ يعني $z' = z + b$. و بالتالي $z' - z = b$ و بما أن $z' - z$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ فإن
 $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{U}$ حيث $\overrightarrow{U}$ صورة العدد المركب b و بالتالي التحويل f هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{U}$ ذو اللاحقة b .

خاصية: التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = z + b$
 (b عدد مركب) هو انسحاب شعاعه $\overrightarrow{U}$ صورة b .

2. الحالة الثانية $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$.

$f(M) = M'$ يعني $z' = az + b$. لتكن Ω لاحقتها w نقطة صامدة بالتحويل f و منه $f(\Omega) = \Omega$.
 $f(\Omega) = \Omega$ يعني $w = aw + b$ أي $w(1-a) = b$ بما أن $a \neq 1$ فإن $w = \frac{b}{1-a}$ و Ω وحيدة .
 بطرح المساويتين طرفا بمن طرف $z' = az + b$ و $w = aw + b$ نحصل على $z' - w = a(z - w)$.
 من $z' - w = a(z - w)$ و a عدد حقيقي، نستنتج أن $\overrightarrow{\Omega M'} = a \overrightarrow{\Omega M}$.

و بالتالي f هو التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته a .

خاصية: التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = az + b$
 مع a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب ، هو التحاكي الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة
 $\frac{b}{1-a}$ ونسبته a .

3. الحالة الثالثة $a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$.

$f(M) = M'$ يعني $z' = az + b$. لتكن Ω ذات اللاحقة w نقطة صامدة بالتحويل f أي $f(\Omega) = \Omega$.
 يعني $w = aw + b$ أي $w(1-a) = b$ و بما أن $a \neq 1$ فإن $w = \frac{b}{1-a}$ و بالتالي Ω وحيدة .
 بطرح المساويتين طرفا من طرف $z' = az + b$ و $w = aw + b$ نحصل على $z' - w = a(z - w)$.
 أي $a = \frac{z' - w}{z - w}$. نستنتج أن $\left| \frac{z' - w}{z - w} \right| = |a| = 1$ و $\arg\left(\frac{z' - w}{z - w}\right) = \arg(a)$.
 أي $\Omega M' = \Omega M$ و $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \arg(a)$.

و بالتالي f هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\arg(a)$.

خاصية: التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = az + b$
 مع a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب ، هو الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة
 $\frac{b}{1-a}$ و زاويته $\arg(a)$.

تمرين محلول 1: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

$t_{\vec{u}}$ الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-2;1)$

(1) عين العبارة المركبة للانسحاب $t_{\vec{u}}$.

(2) A النقطة التي لاحقتها $3-i$ ، عين لاحقة النقطة A' صورة A بالانسحاب $t_{\vec{u}}$.

الحل: (1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالانسحاب $t_{\vec{u}}$.

$$z' = z - 2 + i \text{ يعني } t_{\vec{u}}(M) = M'$$

$$(2) \quad t_{\vec{u}}(A) = A' \text{ يعني } z_{A'} = z_A - 2 + i \text{ ومنه } z_{A'} = 3 - i - 2 + i = 1$$

تمرين محلول 2: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

h التحاكي الذي مركزه A ذات اللاحقة $-1+2i$ و نسبته 3.

(1) عين العبارة المركبة للتحاكي h .

(2) B النقطة التي لاحقتها $-3-2i$ ، عين لاحقة النقطة B' صورة B بالتحاكي h .

الحل: (1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالتحاكي h .

$$h(M) = M' \text{ يعني } z' = 3z + b. \text{ بما أن النقطة } A \text{ هي مركز التحاكي فإن } h(A) = A \text{ ومنه } z_A = 3z_A + b$$

$$\text{أي } -1 + 2i = 3(-1 + 2i) + b \text{ ومنه } b = 2 - 4i. \text{ إذن } z' = 3z + 2 - 4i$$

$$(2) \quad h(B) = B' \text{ يعني } z_{B'} = 3z_B + 2 - 4i \text{ ومنه } z_{B'} = 3(-3 - 2i) + 2 - 4i = -7 - 10i$$

تمرين محلول 3: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

r الدوران الذي مركزه A ذات اللاحقة $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و زاويته q حيث $\frac{p}{3}$ أحد أقياسها.

(1) عين العبارة المركبة للدوران r .

(2) B النقطة التي لاحقتها $1-i\sqrt{3}$ ، عين لاحقة النقطة B' صورة B بالدوران r .

الحل: (1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالدوران r .

$$r(M) = M' \text{ يعني } z' = az + b \text{ حيث } |a| = 1 \text{ و } \arg(a) = \frac{p}{3} + k2p \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

$$\text{ومنّه } a = \cos\left(\frac{p}{3}\right) + i \sin\left(\frac{p}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{p}{3}}$$

$$\text{بما أن النقطة } A \text{ هي مركز التحاكي فإن } h(A) = A \text{ ومنّه } z_A = e^{i\frac{p}{3}} z_A + b$$

$$\text{نعلم أن } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{4p}{3}} \text{ ومنّه } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + b = e^{i\frac{5p}{3}} + b = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + b$$

$$\text{إذن } b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -1 \text{ أي } z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - 1$$

$$(2) \quad r(B) = B' \text{ يعني } z_{B'} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_B - 1 \text{ أي } z_{B'} = 1$$

معادلات يتحول حلها إلى الدرجة الثانية

1. معادلة من الدرجة الرابعة: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$

ليكن كثير الحدود $f(z)$ للمتغير المركب z حيث :

$$f(z) = z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45$$

(1) أحسب $f(-3)$.

(2) أحسب $f(3i)$.

(3) أوجد كثير الحدود $g(z) = az^2 + bz + c$ للمتغير المركب z (a, b, c أعداد مركبة) حيث

$$f(z) = g(z)[z^2 + (3-3i)z - 9i]$$

(4) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $f(z) = 0$.

(5) نسمي A, B, C, D صور الأعداد : $3i, 1-2i, 2-i$ و -3 على الترتيب .

(a) أثبت وجود دوران r يحول A إلى B و يحول C إلى D .

(b) أثبت وجود تحاكي h يحول A إلى B و يحول D إلى C .

(c) عين العبارة المركبة للتحويل $r \circ h$.

(d) عين العبارة المركبة للتحويل $h \circ r$.

2. معادلة من الدرجة الثالثة: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$

ليكن كثير الحدود $f(z)$ للمتغير المركب z حيث أن :

$$f(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}$$

(1) أثبت أن $f(z)$ يقبل جذرين مترافقين .

(2) أحسب $f(-7+5i)$.

(3) أحسب $f(i\sqrt{2})$.

(4) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $f(z) = 0$.

(5) نسمي A, B, C صور الأعداد : $-7+5i, -7-5i, i\sqrt{2}$ و على الترتيب .

عين لاحقة النقطة G صورة النقطة C بالدوران r الذي مركزه O و أحد أقياس زاويته $-\frac{p}{4}$.

(6) لتكن D النقطة التي لاحقتها $1+i$. عين لاحقة النقطة E حيث $ABDE$ متوازي الأضلاع .

(7) لتكن F النقطة التي لاحقتها $1+11i$. نصع $w = \frac{(z_A - z_D)}{(z_F - z_B)}$.

أكتب w على الشكل الجبري .

أكتب w على الشكل الأسّي .

(8) أثبت أن المستقيمين (AD) و (BF) متعامدان .

استنتج طبيعة الرباعي $ABDF$.

1. الحالة العامة :

ليكن العدد المركب $z = r(\cos(q) + i \sin(q))$ مع r عدد حقيقي موجب تماماً و q عدد حقيقي .
 ليكن العدد المركب $w = r(\cos(a) + i \sin(a))$ مع r عدد حقيقي موجب تماماً و a عدد حقيقي ، جذراً
 نونياً للعدد z أي $z = w^n$ مع n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

(1) بتطبيق دستور موافر أكتب w^n بدلالة n .

(2) بين أن $z = w^n$ يعني $(r = \sqrt[n]{r} \text{ و } a = \frac{q}{n} + \frac{k2p}{n})$ حيث k عدد صحيح

(3) أوجد w_0 ، w_1 الجذرين النونيين المحصل عليهما من أجل $k=0$ و $k=1$ على الترتيب .

(4) بين أن z يقبل n جذر نوني .

(5) أكتب هذه الجذور النونية على الشكل الأسّي .

(6) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

كيف يتم تمثيل النقط M_k صور الجذور النونية لـ z في المستوي ؟

2. تطبيق أول .

ليكن العدد المركب $z = 4 + 4i\sqrt{3}$.

(1) أكتب العدد z على الشكل المثلثي .

(2) أوجد الجذور التكعيبية للعدد z .

(6) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

مثل في المستوي النقط M_k صور الجذور التكعيبية لـ z .

2. تطبيق ثان .

(1) أحسب $(1-i)^6$.

(2) أكتب 1 على الشكل المثلثي .

(3) عين الجذور السداسية للعدد المركب 1 على الشكل المثلثي .

(4) أكتب الجذور السداسية للعدد المركب 1 على الشكل الجبري .

(5) أكتب العدد المركب $1-i$ على الشكل المثلثي .

(6) باستعمال الجذور السداسية للعدد المركب 1 عين الجذور السداسية للعدد $8i$ على الشكل المثلثي .

(7) أكتب الجذور السداسية للعدد المركب $8i$ على الشكل الجبري .

(8) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

مثل في المستوي النقط M_k صور الجذور السداسية لـ 1 ثم مثل في المستوي النقط P_k صور الجذور

السداسية لـ $8i$.

تمرين : بكالوريا

نعتبر كثير الحدود للمتغير المركب z المعروف بـ :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$$

$$1. \text{ أحسب } P(i\sqrt{3}) \text{ و } P(-i\sqrt{3})$$

برهن أنه توجد أعداد حقيقية a, b, c بحيث من أجل

$$P(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c), \quad z \text{ عدد مركب}$$

$$2. \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة ذات المجهول } z, \quad P(z) = 0$$

3. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$$(O; \vec{u}; \vec{v})$$

1. مثلّ النقاط A, B, C, D ذات اللواحق على الترتيب

$$z_D = \overline{z_C} \text{ و } z_C = 3 + 2i\sqrt{3}, z_B = -i\sqrt{3}, z_A = i\sqrt{3}$$

2. أثبت أن النقاط A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة.

4. لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى المبدأ O .

$$\text{بين أن } \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ثم عيّن طبيعة المثلث } BEC.$$

حل مختصر

$$1. \text{ بالتعويض نجد } P(i\sqrt{3}) = 0 \text{ و } P(-i\sqrt{3}) = 0$$

$$P(z) = az^4 + bz^3 + (3a+c)z^2 + 3bz + 3c$$

$$\text{بالمطابقة نجد } a=1, b=-6, 3a+c=24, 3b=-18, 3c=63$$

$$\text{ومعناه } P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) \text{ أي } a=1, b=-6, c=21$$

$$2. P(z) = 0 \text{ معناه } (z^2 + 3 = 0) \text{ أو } (z^2 - 6z + 21 = 0)$$

$$\text{لدينا } (z^2 + 3 = 0) \text{ معناه } z^2 = -3 \text{ ويكافئ } z^2 = 3i^2 \text{ أي } z = i\sqrt{3} \text{ أو } z = -i\sqrt{3}$$

$$\text{مميز للمعادلة } (z^2 - 6z + 21 = 0) \text{ هو } \Delta = -48 \text{ أي } \Delta = 48i^2 = (4i\sqrt{3})^2$$

$$\text{ومنه الحلان هما } \frac{6+4i\sqrt{3}}{2} \text{ و } \frac{6-4i\sqrt{3}}{2} \text{ أي } 3+2i\sqrt{3} \text{ و } 3-2i\sqrt{3}$$

$$P(z) = 0 \text{ معناه } z \in \{i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, 3+2i\sqrt{3}, 3-2i\sqrt{3}\}$$

3. في المثلث ABC ، محوري القطعتين $[AB]$ و $[AC]$ يتقاطعان في

النقطة I وهي من محور الفواصل إذن المثلث ABC محيط بالدائرة C ذات

المركز I ، بما أن $z_D = \overline{z_C}$ فإن C و D

متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل وبالتالي

بالنسبة إلى I ، إذن $[CD]$ هي قطر للدائرة C .

4. بما أن E نظيرة D بالنسبة إلى O فإن

$$z_E = -z_D = -\overline{z_C} = -3 + 2i\sqrt{3}$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3\sqrt{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$BC = BE \text{ إذن } \left| \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} \right| = 1, \left| \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} \right| = \frac{|z_C - z_B|}{|z_E - z_B|} = \frac{BC}{BE}$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = \arg(z_C - z_B) - \arg(z_E - z_B) = (\overline{BE}, \overline{BC}) = -\frac{\pi}{3}$$

إذن المثلث ABE متقايس أضلاع.

تعليق

عند الحساب لاحظ أن

$$(-i\sqrt{3})^2 = (i\sqrt{3})^2 = -3$$

$$(-i\sqrt{3})^3 = i\sqrt{3}(i\sqrt{3})^2 \text{ و}$$

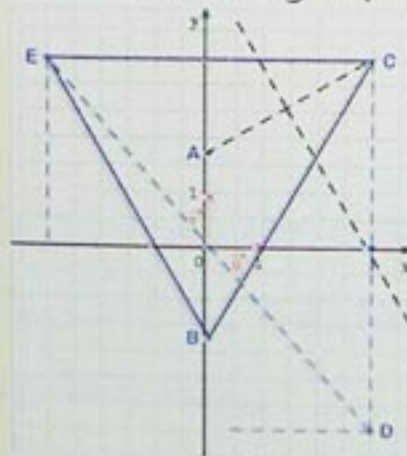
حل المعادلة $(z^2 + 3 = 0)$ هو

تعيين الجذرين التربيعيين للعدد -3

يمكن استعمال المميز المختصر.

في الحالة $\Delta \in \mathbb{R}_-$ فإن للمعادلة حلين مترافقين.

يمكن إتباع طريقة حسابية لكن الإجابة بطريقة هندسية غالباً ما تكون أسرع وأكثر اختصاراً.



العدد $z_C - z_B$ يمثل بالشعاع $\overline{BC}$ ومنه $|z_C - z_B| = BC$.

$$\arg(z_C - z_B) = (\vec{u}, \overline{BC})$$

تطبيق علاقة شال في الزوايا

$$(\overline{BE}, \overline{BC}) = (\vec{u}, \overline{BC}) - (\vec{u}, \overline{BE})$$

تنبيه

في التمارين الخاصة بالأعداد المركبة ، نتبع أحيانا طرائق هندسية لتجنب الأجوبة الطويلة (باستعمال الحسابات) ويكون عندئذ الحل أسرع ومختصرا .
رغم أن الأشكال الهندسية تكون غير مطلوبة عموما فإنه من المستحسن مراعاتها بهدف المراقبة والتحقق من النتائج المحصل عليها .

تمرين بكالوريا

α عدد مركب غير معدوم .

1. أنشر العبارة $[1-i(1+\alpha)]^2$.

2. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول z :

$$z^2 + [-1+i(1-\alpha)]z + i\alpha + \alpha = 0$$

نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلي هذه المعادلة حيث z_2 هو الحل المستقل عن α .

3. نفرض في هذا السؤال أن $\alpha = iy$ حيث y عدد حقيقي غير معدوم .

أكتب كلا من z_1 و z_2 على شكله المثلثي .

4. المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

A و M نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_1 و z_2 على الترتيب ، ولتكن E_p مجموعة النقط M من المستوي التي

يكون من أجلها : $(z - z_2)(\overline{z - z_2}) = 2$.

تحقق أن مبدأ المعلم O ينتمي إلى E_p ثم عيّن E_p .

توجيهات

2. عند حساب المميز Δ تجد $\Delta = [1-i(1+\alpha)]^2$.

3. لكتابة z_1 على شكله المثلثي لاحظ أنه عدد حقيقي ومميز الحالتين موجب وسالب .

4. تذكر أن $z \times \overline{z} = |z|^2$ وأحسب $(z - z_0)(\overline{z - z_0})$.

العدد المركب z يمثل بالشعاع $\overline{OM}$ و z_2 يمثل بالشعاع $\overline{OA}$ وتستنتج أن العدد

$z - z_2$ يمثل بالشعاع $\overline{AM}$ وتجد في الأخير أن $AM = \sqrt{2}$.

7 أعط مرافق لكل من الأعداد المركبة التالية :

$$z_1 = 2 + 4i \quad ; \quad z_2 = 3 - i \quad ; \quad z_3 = i\sqrt{2} - 3 \quad ; \quad z_4 = -\frac{5}{2}i$$

8 نعتبر العدد المركب $z = 3 + 4i$

أ - أحسب $z \times \bar{z}$

ب - أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $z' = \frac{i}{z}$

9 نعتبر العدد المركب $z = 2 + i$

أكتب على الشكل الجبري العدد المركب z' المعروف

في كل من الحالات المقترحة التالية :

$$أ - z' = \frac{1}{z} + \frac{i}{z} \quad ب - z' = \frac{1+2i}{z} - \frac{3-i}{z}$$

$$ج - z' = \frac{1+3i}{z} \times \frac{3-2i}{z}$$

10 أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري .

$$z_1 = \frac{1}{i} \quad ; \quad z_2 = \frac{1}{1-i} \quad ; \quad z_3 = \frac{1}{3+i\sqrt{2}} \quad ; \quad z_4 = \frac{1}{3i-5}$$

11 أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري .

$$z_1 = \frac{4-6i}{3+2i} \quad ; \quad z_2 = \frac{5+15i}{1+2i} \quad ; \quad z_3 = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} \quad ; \quad z_4 = \frac{1+i}{1-i}$$

12 أكتب مرافق لكل من الأعداد المركبة التالية على

الشكل الجبري .

$$z_1 = (1-i)(2+i) \quad ; \quad z_2 = (1+2i)^3$$

$$z_3 = \frac{3-i}{1+i} \quad ; \quad z_4 = \left(\frac{1+3i}{2-i} \right)^4$$

13 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي θ ،

$$\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

$$14 \text{ نضع : } z_1 = \frac{3-i}{2+5i} \text{ و } z_2 = \frac{3+i}{2-5i}$$

في كل التمارين ينسب المستوى المركب إلى معلم

متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1 - الأعداد المركبة .

1 عين $\text{Re}(z)$ و $\text{Im}(z)$ في كل حالة من الحالات

$$\text{التالية : } z = 3 + 2i \quad ; \quad z = -1 + 3i \quad ; \quad z = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad z = -i\sqrt{3}$$

$$z = i - 3\sqrt{2} \quad ; \quad z = \sqrt{5} + \sqrt{7} \quad ; \quad z = -i\sqrt{3}$$

2 من بين الأعداد المركبة التالية ، عين الأعداد المكتوبة

على شكلها الجبري .

$$z_1 = 3 + 2i + \sqrt{2} \quad ; \quad z_2 = 2i + \sqrt{2} + 5$$

$$z_1 = \frac{3}{5} + \sqrt{2}i + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_3 = (3 + \sqrt{3}) + 2i\sqrt{3}$$

3 z عدد مركب حيث :

$$z = (x^2 + x) + i(x^2 + y - 1)$$

عين العددين الحقيقيين x و y حتى يكون العدد

المركب z معدوما .

4 (1) عين إحداثيتي النقطة D ذات اللاحقة

$$z_D = \sqrt{3} + 3i$$

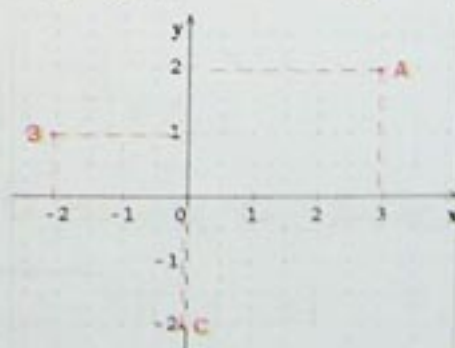
(2) عين اللواحق z_A ، z_B و z_C للنقط $A(\sqrt{3}; 1)$ ،

$B(-\sqrt{3}; -1)$ و $C(0; 2)$ على الترتيب.

5 z عدد مركب . نضع : $z_1 = 3 + zi$

$$\text{و } z_2 = 2 + z + 5i$$

أكتب العددين المركبين z_1 و z_2 على الشكل الجبري في



كل من الحالات التالية :

z لاحقة النقطة A

z لاحقة النقطة B

z لاحقة النقطة C

6 A نقطة من المستوى لاحقتها العدد المركب

$a = -1 + 2i$ ؛ عين العدد المركب z بحيث تكون

صورته M نظيرة النقطة A بالنسبة إلى :

— مبدأ المعلم ؛ — حامل محور الفواصل ؛

— حامل محور الترتيب ؛ — المنصف الأول .

1) بدون إجراء الحساب برر أن $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي و $z_1 - z_2$ هو عدد تخيلي صرف .

2) أحسب $z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$ ثم استنتج الشكل الجبري للعدد المركب z_1 .

15) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية (تعطى الحلول على الشكل الجبري)

أ - $(1-i)z = 3+i$

ب - $3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i$

ج - $(3-4i)z^2 = iz$

د - $\frac{z+1}{z-1} = 2i$

16) حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ - $2\bar{z} = -1+i$

ب - $(2z+1-i)(i\bar{z}+i-2)=0$ ج - $\frac{\bar{z}-1}{z+1} = i$

17) أكتب بدلالة $\bar{z}$ مرافق الأعداد المركبة Z التالية :

أ - $Z = 2+3iz$ ب - $Z = (2+iz)(1+3z)$

ج - $Z = \frac{2+iz}{z+2}$ د - $Z = z^3 - iz^2 + 3z - 3i$

18) نقطة M من المستوي المركب لاحتقتها العدد

المركب z .

عين مجموعة النقط M بحيث يكون العدد $z + \frac{1}{z}$ حقيقيا .

3. التمارين في مجموعة الأعداد المركبة .

19) A, B, C و D أربع نقط من المستوي لواحقتها

على الترتيب $2+i, -1+4i, 3+2i$ و $2-i$.

برهن أن الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع .

20) z_A, z_B و z_C هي على الترتيب ، لواحق النقط

$A(\sqrt{3};1), B(-\sqrt{3};-1)$ و $C(0;2)$

عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

في التمارين من 21 إلى 24 المطلوب تعيين الشكل الجبري للأعداد المركبة المقترحة .

21) $z_1 = (3-i) + (2+3i)$

$z_2 = (-2+3i) - (1-5i)$

$z_3 = \sqrt{6}(-i\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{3}}{3}i + \sqrt{3}$

22) $z_1 = (1-i)^2$ ، $z_2 = (1+i)^2$

$z_3 = (1-i)(1+i)$

23) $z_1 = (1-i)(3+2i)$ ، $z_2 = (4+3i)^2$

$z_3 = (3-4i)^2$

24) $z_1 = -2i(3-i)(1+2i)$

$z_2 = (4+3i)(2-i)(-1+2i)$

$z_3 = (\sqrt{3}+i)^2 - (\sqrt{3}-i)^2$

25) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z

التالية :

أ - $3z - 5 + 2i = 0$ ب - $\frac{z-3}{2+5i} - 3 + i = 0$

ج - $\frac{iz-3}{z-1} = 2+i$

26) A, B و C النقط ذات اللواحق $3+2i, -1+3i$

و $-2-2i$ على الترتيب .

أ - عين لاحقة النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

ب - عين لاحقة المرجح G للجملة المثقلة

$\{(A,2);(B,-3);(C,5)\}$

27) A, B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقتها على

الترتيب $2+i, 2-i$ و i .

عين لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة A مركز نقل

المثلث BCD .

28) نضع $z_1 = 5-2i, z_2 = 2+4i, z_3 = -3+3i$

(1) أحسب $\text{Re}(z_1 + z_2 + z_3)$

$\text{Re}\left[2z_1 - z_2 + \frac{1}{2}z_3\right]$ و $\text{Re}[z_2(z_1 + z_3)]$

(2) أحسب $\text{Im}(z_1 - 3iz_3), \text{Im}[z_2 - z_1z_3]$

و $\text{Im}(z_1z_2z_3)$

20 من أجل كل عدد مركب z ، نضع :

$$f(z) = z^2 - z \text{ حيث } z = x + yi \text{ مع } x \text{ و } y$$

عديدين حقيقيين .

$$\text{برهن أن : } \text{Re}[f(z)] = x^2 - y^2 - x$$

$$\text{و } \text{Im}[f(z)] = y(2x - 1)$$

4. طويلة وعمدة عدد مركب .

30 z_A, z_B, z_C و z_D هي على الترتيب ، لواحق

$$\text{النقط } C(0;2), B(-\sqrt{3};-1), A(\sqrt{3};1)$$

$$\text{و } D = (\sqrt{3};3)$$

(1) أحسب $|z_A|, |z_B|$ و $|z_C|$. ماذا يمكنك أن تستنتج ؟

(2) ما هي طبيعة الرباعي $AOCD$ ؟

31 نعتبر النقط A, B و C ذات اللواحق $z_1 = 2$ ،

$$z_2 = -i \text{ و } z_3 = 1 + 2i$$

$$(1) \text{ أحسب } |z_2 - z_1|, |z_3 - z_1| \text{ و } |z_3 - z_2|$$

(2) استنتج طبيعة المثلث ABC .

32 نعتبر الأعداد المركبة $z_1 = 5 - 2i$ ، $z_2 = 2 + 4i$ ،

$$\text{و } z_3 = -3 + 3i$$

$$\text{أحسب : } |z_1|, |z_2|, |z_1 + z_2 + z_3| \text{ و } |z_1 z_2 z_3|$$

33 في كل حالة من الحالات التالية ، عيّن مجموعة النقط

M ذات اللاحقة العدد المركب z الذي يحقق المساواة

المقترحة .

$$\text{أ - } |z| = 2 \quad \text{ب - } |-3z| = \sqrt{2}$$

$$\text{ج - } |z|^2 - 2\text{Re}(z) = 0$$

34 عيّن ثم مثل مجموعة النقط M ذات اللاحقة

المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة .

$$\text{أ - } |z + 1 + 2i| = |z - 4| \quad \text{ب - } |z - 3i| = 2$$

$$\text{ج - } |2z - i| = 2$$

35 يعطى العدد المركب α حيث :

$$\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

(1) أحسب α^2 ثم α^4 .

(2) أحسب $|\alpha^4|$ ثم استنتج $|\alpha|$.

(3) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . عيّن

مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z حيث

$$|\alpha z| = 6$$

36 z عدد مركب غير معدوم .

أ - باستعمال البرهان بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل

عدد طبيعي غير معدوم n ، $\arg(z^n) = n \arg(z)$.

استنتج أنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم n ،

$$\arg(z^n) = n \arg(z)$$

37 z عدد مركب غير معدوم طويلته r و θ عمدة له .

جد الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة التالية :

$$-z, \bar{z}, \frac{1}{z}, z^3, \frac{1}{z^n} \text{ مع } n \in \mathbb{N}^*$$

38 z عدد مركب غير معدوم طويلته r و θ عمدة له .

جد الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة التالية : $\frac{z}{4}$ ،

$$\frac{-7}{z}, 2iz, (iz)^5, iz^5, \left(\frac{iz}{r}\right)^n \text{ مع } n \in \mathbb{N}^*$$

39 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، عيّن

الطويلة وعمدة للعدد المركب z .

$$\text{أ - } z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{ب - } z = -3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{ج - } z = \sqrt{5} \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{د - } z = \sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6}$$

40 في كل حالة من الحالات التالية مثل مجموعة النقط

ذات اللاحقة العدد المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة

$$\text{أ - } \text{Arg}(iz) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{ب - } \text{Arg}\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ج - } \text{Arg}(z) = \text{Arg}(\bar{z})$$

5 - الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم .

في التمارين من 41 إلى 45 المطلوب كتابة الأعداد المركبة المقترحة على شكلها المثلثي :

$$41 \quad z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad , \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$42 \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad , \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$43 \quad z_1 = 3 \quad , \quad z_2 = -\sqrt{5} \quad , \quad z_3 = i \quad , \quad z_4 = \frac{1}{2}i$$

$$z_5 = -7i$$

أكتب قاعدة بسيطة لكتابة على الشكل المثلثي الأعداد الحقيقية ثم قاعدة بالنسبة للأعداد التخيلية صرفا .

$$44 \quad z_1 = 1+i \quad , \quad z_2 = 3-3i$$

$$z_3 = -\sqrt{5} - i\sqrt{15} \quad , \quad z_4 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$$

$$45 \quad z_1 = (2+2i)(\sqrt{3}-i) \quad , \quad z_2 = \frac{4}{\sqrt{3}+i}$$

$$z_3 = \frac{3i}{2+2i\sqrt{3}} \quad , \quad z_4 = \frac{\sqrt{6}}{1+i}$$

$$46 \quad \text{نعتبر العدد المركب } Z = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$$

(1) أكتب العدد المركب Z على الشكل الجبري

(2) أكتب العدد المركب Z على الشكل المثلثي .

(3) أكتب على الشكل المثلثي الأعداد: $\frac{1}{Z}$ ، Z^{2009} و $\bar{Z}$.

$$47 \quad Z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{2(1-i)} \quad \text{عدد مركب حيث}$$

أحسب كلا من الأعداد المركبة التالية : Z^6 ، Z^{12} و Z^{2010} تعطى النتائج على الشكل الجبري .

6 - الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم .

48 أنشئ في المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقاط A ، B ، C و D

صور على الترتيب للأعداد المركبة التالية :

$$2e^{-i\frac{5\pi}{6}} \quad , \quad e^{i\pi} \quad , \quad \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \quad , \quad \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

49 أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة

$$\text{التالية : } 6e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad ; \quad \sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}} \quad ; \quad \frac{1}{2}e^{i\pi} \quad ; \quad 2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

50 أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي .

$$z_1 = 2-2i \quad ; \quad z_2 = 3\sqrt{3}-3i \quad ; \quad z_3 = \frac{5}{4}i \quad ; \quad z_4 = -1$$

51 عين شكلا أسّيًا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$$z_1 = -e^{i\frac{\pi}{12}} \quad ; \quad z_2 = -3e^{i\frac{\pi}{8}} \quad ; \quad z_3 = -\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

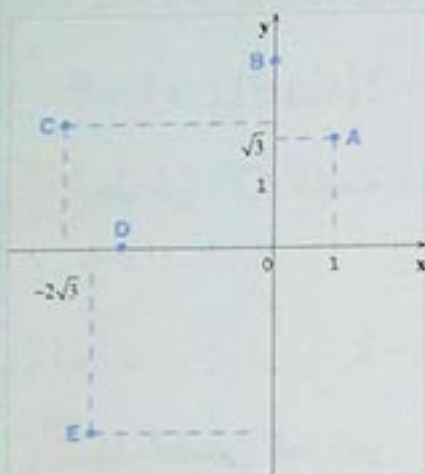
$$z_4 = -\frac{1}{2}e^{i\pi}$$

52 بقراءة بيانية ، جد الكتابة

الأسّيّة للواحد النقاط A ، B ،

C ، D و E الممثلة في

الشكل المقابل.



$$53 \quad \text{تعطى الأعداد المركبة : } z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad , \quad z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{و } z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

عين شكلا أسّيًا لكل من الأعداد المركبة التالية . $z_1 z_2$ ؛

$$\frac{1}{z_3} \quad ; \quad \frac{z_2}{z_3} \quad ; \quad \frac{z_1}{z_2} \quad ; \quad z_3^4 \quad ; \quad z_1^3 \quad ; \quad \overline{z_3 z_1 z_2} \quad ; \quad z_1 z_2 z_3$$

54 أعط شكلا أسّيًا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$$z_1 = (2\sqrt{3} + 6i)e^{i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad z_2 = (\sqrt{3} + i\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_3 = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z_4 = 3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)$$

55 في كل حالة من الحالات التالية أكتب العدد المركب

z على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الجبري لكل من $\bar{z}$

$$\text{و } \frac{1}{z}$$

$$\text{أ - } z = \frac{6}{1+i} \quad \text{ب - } z = (1+i\sqrt{3})^4$$

$$\text{ج - } z = 3ie^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{د - } z = (2\sqrt{3} + 2i)^5 e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

56 حل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات ذات المجهول z

التالية :

أ - $2z^2 - 6z + 5 = 0$. ب - $z^2 - 5z + 9 = 0$.

ج - $z^2 + z + 1 = 0$. د - $z^2 - 2z + 3 = 0$.

هـ - $z^2 = z + 1$. و - $z^2 + 3 = 0$.

57 حل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات ذات المجهول z التالية:

أ - $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

ب - $z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$.

ج - $z^2 - 2(\cos \theta)z + 1 = 0$ حيث θ عدد حقيقي .

د - $z^2 - 2(\sin \theta)z + 1 = 0$ حيث θ عدد حقيقي .

58 حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة ذات المجهول $(z_1; z_2)$ التالية :

$$\begin{cases} z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = -2 \end{cases}$$

59 جد العددين المركبين α و β حيث المعادلة

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0$$

60 حل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلتين ذات المجهول z

التاليتين :

أ - $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$.

ب - $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$.

61 (1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$. عين

المضوية وعمدة لكل من الحلين لهذه المعادلة .

(2) استنتج الحلين في $\mathbb{C}$ للمعادلة

$$(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$$

62 (1) جد في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين للعدد

$$L = 2 - 2i\sqrt{3}$$

(2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$2z^2 + 4iz + i\sqrt{3} - 3 = 0$$

63 (1) عين العدد الحقيقي x حيث :

$$(x + 2i)^2 = -3 + 4i$$

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات

$$z^2 - (3 - 4i)z - 1 - 7i = 0$$

64 بكالوريا

(1) عين العددين الحقيقيين α و β بحيث :

$$(\alpha + i\beta)^2 = 5 - 12i$$

(2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$iz^2 - (1 - 2i)z + 2(1 + i) = 0$$

(3) نسمي z_1 و z_2 حلي المعادلة السابقة ، أثبت أنالعددين z_1^{1984} و z_2^{1984} حقيقيان .65 لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذاتالمجهول z التالية :

$$z^2 - [\sqrt{3} + 1 + 2i]z + (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i = 0$$

أ - احسب $(\sqrt{3} - 1)^2$.

ب - حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة المعطاة .

66 أ - احسب $(\sqrt{3} + 3i)^2$.

ب - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات

$$2z^2 + (3\sqrt{3} + i)z + 4 = 0$$

67 1 - جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $3 + 4i$.2 - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات

$$z^2 - 2(1 + 2i)z + 9 + 20i = 0$$

8 - التحويلات النقطية المألوفة .

68 T التحويل النقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيتين $(x; y)$ ، النقطة M' ذاتالإحداثيتين $(x'; y')$ حيث :

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y + 1 \\ y' = 5x - 3y \end{cases}$$

(1) عين إحداثيتي صورة النقطة $A(-1; 1)$.(2) عين إحداثيتي سابقة النقطة $B(-2; 3)$.(3) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل T .

69 T التحويل النقطي في المستوي يرفق بكل نقطة

M ذات الإحداثيتين $(x; y)$ ، النقطة M' ذات

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y - 12 \\ y' = -\frac{3}{2}x + 2y - 4 \end{cases} \text{ حيث } (x'; y') \text{ الإحداثيتين}$$

(1) عن مجموعة النقطة صامدة بالتحويل T .

(2) أثبت أنه من أجل كل نقطة M من المستوي ،

صورتها M' تنتمي إلى مستقيم ثابت يطلب تعيينه .

(3) أثبت أنه إذا كانت النقطة M غير صامدة و M'

صورتها بالتحويل T فإن منتصف القطعة $[MM']$ ينتمي إلى مستقيم ثابت .

(4) استنتج طريقة هندسية لإنشاء النقطة M' .

70 ABC مثلث .

E, F و G صور A, B, C على الترتيب

بالانسحاب الذي شعاعه $\overline{AB}$.

I, J و K صور A, B, C على الترتيب

بالانسحاب الذي شعاعه $\overline{BC}$.

أثبت أن C ي منتصف القطعة $[IG]$.

71 Δ و d مستقيمان من المستوي معادلتهما على

الترتيب $3x + 2y - 5 = 0$ و $3x - 2y + 1 = 0$.

اكتب معادلة لكل من صورتي المستقيمين Δ و d

بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(2; -3)$.

72 ABC مثلث في المستوي الموجه حيث

$$(\overline{BA}, \overline{BC}) = \frac{\pi}{3} .$$

A' و C' صورنا على الترتيب للنقطتين A و C

بالدوران r ذي المركز B والزاوية $-\frac{\pi}{4}$.

A'' و C'' منتصفا القطعتين $[A'B]$ و $[BC']$ على

الترتيب .

أ - أنجز شكلا .

ب - بين أن المثلثين ABC و $A''BC''$ متشابهان .

73 في المستوي الموجه ، AMN هو مثلث متساوي

الساقين وقائم في A حيث $(\overline{AM}, \overline{AN}) = \frac{\pi}{2}$.

N_1 مرجح النقطتين المتقلتين $(A, 2)$ و $(N, -1)$.

B نقطة متميزة عن النقط A, M, N و N_1 .

T صورة المثلث AMN_1 بالدوران ذي المركز B

والزاوية $-\frac{\pi}{2}$.

أنجز شكلا . وبرهن أن المثلثين AMN و T متقايسان .

74 (Δ) مستقيم ثابت . A نقطة ثابتة لا تنتمي إلى

المستقيم (Δ) . من أجل كل نقطة M من (Δ) ، نرسم

النقطة N منتصف القطعة $[AM]$.

ما هو المحل الهندسي للنقطة N لما تتغير النقطة M على

المستقيم (Δ) ؟

75 (C) دائرة ثابتة قطرها $[AB]$. M نقطة متغيرة

من الدائرة (C) حيث $(M \neq A \text{ و } M \neq B)$.

لكل نقطة M نعين G مركز ثقل المثلث ABM .

ما هو المحل الهندسي للنقطة G لما تتغير النقطة M على

الدائرة (C) ما عدا A و B ؟

76 ABC مثلث قائم في A . لكل نقطة M من القطعة

$[BC]$ نعين M_1 نظيرة M بالنسبة للمستقيم (AB)

ونعين M_2 نظيرة M بالنسبة للمستقيم (AC) .

(1) برهن أن A هو منتصف القطعة $[M_1M_2]$.

(2) ما هو المحل الهندسي لكل من النقطتين M_1 و M_2 لما

تتغير النقطة M على القطعة $[BC]$ ؟

77 T التحويل النقطي في المستوي يرفق بكل نقطة

M ذات الإحداثيتين $(x; y)$ ، النقطة M' ذات

الإحداثيتين $(x'; y')$.

في كل حالة من الحالتين التاليتين ، عين طبيعة التحويل T

مبينا عناصره المميزة :

$$\begin{cases} x' = -2x - 3 \\ y' = -2y + 4 \end{cases} \text{ ب - } \quad \begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 2 \end{cases} \text{ أ -}$$

78 أكتب العبارة المركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-1;2)$.

ت : أكتب العبارة المركبة للتحاكي ذي المركز O مبدأ المعلم ونسبته 3 .

79 Ω نقطة لاحقها العدد المركب $\omega = 1-i$.

عين العبارة المركبة للتحاكي ذي النسبة $-\frac{1}{2}$ والمركز Ω .

80 أكتب عبارة مركبة للدوران الذي مركزه O مبدأ المعلم وزاويته $\frac{\pi}{6}$.

81 تحويل نقطي في المستوى يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z' = \alpha z + \beta$.

في كل من الحالات المقترحة أدناه ، عين طبيعة التحويل t مع ذكر عناصره المميزة .

أ - $\alpha = 1$ و $\beta = 3+i$. ب - $\alpha = i$ و $\beta = 1-i$.

ج - $\alpha = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$ و $\beta = 0$.

د - $\alpha = \frac{5}{2}$ و $\beta = \frac{2i}{5}$.

82 A ، B و C ثلاث نقط من المستوى لواحقها على الترتيب $a = 3+i$ ، $b = -2+3i$ و $8-i$.

أ - عين نسبة التحاكي h ذي المركز C والذي يحول A إلى B .

ب - نقول عن مستقيم الذي ينطبق على صورته بتحويل ، أنه صامدا إجماليا .

برهن أن المستقيم الذي يشمل النقطة C ومعامل توجيهه 2 هو صامدا إجمالي ، ثم أكتب معادلة له .

83 A و B نقطتان من المستوى لاحقتهما

$a = \frac{1}{2}(1+i)$ و $b = \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

عين زاوية الدوران الذي مركزه مبدأ المعلم O ويحول A إلى B .

84 t هو التحويل في المستوى الذي يرفق بكل نقطة M

ذات الإحداثيتين (x, y) ، النقطة M' ذات الإحداثيتين (x', y') حيث : $x' = 1-y$ و $y' = x-2$.

نضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$.

أ - أكتب z' بدلالة z .

ب - ما هي طبيعة التحويل t مبينا عناصره المميزة ؟

85 t هو التحويل في المستوى الذي يرفق بكل نقطة M

ذات الإحداثيتين (x, y) ، النقطة M' ذات الإحداثيتين (x', y') حيث : $x' = 2x - \frac{3}{2}$ و $y' = 2y + \frac{1}{2}$.

أ - ما هي طبيعة التحويل t ؟

ب - أكتب العبارة المركبة للتحويل t .

تمارين للتطبيق

في كل التمارين ينسب المستوى المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1 - العمليات في مجموعة الأعداد المركبة .

86 حل في المجموعة $\mathbb{C}^2$ الجمل ذات المجهول $(z; z')$ التالية :

$$\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases} \quad \text{أ -}$$

$$\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ z + z' = 1 - 2i \end{cases} \quad \text{ب -}$$

$$\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases} \quad \text{ج -}$$

87 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{4n} = 1$$

88 برّر أن العددين $(1+i)^8$ و $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^{2008}$ حقيقيان .

89 أكتب على أبسط شكل الأعداد المركبة i^2 ، i^3 ، i^4 ، i^8 و i^{13} .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $i^{4n+1} = i$ واستنتج i^{2009} .

90 في كل حالة من الحالات التالية ، مثل مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة .

- أ - $\text{Re}(z) = -3$.
ب - $\text{Im}(z) = 2$.
ج - $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$.
د - $[\text{Re}(z+1)]^2 - \text{Im}(z-2) = 0$.

91 z عدد مركب ، A ، M و M' نقط من المستوي لواحقتها 1 ، z و z^2 على الترتيب .
حين مجموعة النقط M حتى تكون النقط A ، M و M' في استقامة .

92 كثير حدود للمتغير المركب z والمعرف بـ :
 $p(z) = z^3 + (-2+3i)z^2 + (13-i)z - 6 - 10i$
من بين الأعداد المركبة i ، 1 ، $1+i$ ما هي الجذور لكثير الحدود p .

93 كثير حدود للمتغير المركب z والمعرف بـ :
 $p(z) = z^3 + (-1-5i)z^2 + (-7-4i)z - 2 + 12i$
أثبت أن p يقبل جذرا حقيقيا يطلب تعيينه .

94 كثير حدود للمتغير المركب z والمعرف بـ :
 $p(z) = z^3 + (1-5i)z^2 + (-7-4i)z - 3 + 3i$
(1) أثبت أن p يقبل جذرين تخيليين صرفا يطلب تعيينهما .
(2) تحقق أن العدد المركب $(-1+i)$ هو كذلك جذرا لـ p .

95 A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقتها $3i$ ، $-3i$ و $2-3i$.

(1) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة
 $\{(A, 1); (B, 2); (C, -2)\}$.

(2) عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها $AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25$.

96 نرفق بكل نقطة $M(x; y)$ ذات اللاحقة z ، النقطة $M'(x'; y')$ ذات اللاحقة z' حيث
 $z' = z^2 - 2(1+i)z$

(1) عبر عن x' و y' بدلالة x و y .

(2) H هي مجموعة النقط M بحيث يكون z' حقيقيا .
برهن أن H هي منحنى دالة h يطلب تعيينها .
2 - مرافق عدد مركب .

97 $z = x + iy$ عدد مركب مع x و y عددين حقيقيين . نضع $\alpha = z - 2\bar{z} + 2 + 3i$.

(1) أحسب بدلالة x و y الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب α .

(2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\alpha = 0$ ، ذات المجهول z .

98 $z = x + iy$ عدد مركب مع x و y عددين حقيقيين . نضع $\alpha = iz + \bar{z} - 3 - 2i$.

(1) أحسب $\alpha - \bar{\alpha}$ بدلالة x و y .

(2) برهن أن : " النقطة ذات اللاحقة α ، تنتمي إلى محور الفواصل " تكافئ " النقطة ذات اللاحقة z تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y = x - 2$ " .

99 نضع $z = x + iy$ مع x و y عددين حقيقيين .
نرفق بكل عدد مركب z العدد المركب α حيث
 $\alpha = 2\bar{z} - 2 + 6i$

(1) أحسب بدلالة x و y الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب α .

(2) هل يوجد عدد مركب z يحقق $\alpha = z$.

100 في المستوي المركب لاحقة النقطة M هي العدد المركب $z = x + iy$ مع x و y عددين حقيقيين .
نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 ، العدد المركب

$$L \text{ حيث } L = \frac{5z-2}{z-1}$$

(1) عبر عن $L + \bar{L}$ بدلالة z و $\bar{z}$.

(2) برهن أن " L هو عدد تخيلي صرف " معناه أن " M هي نقطة من دائرة باستثناء نقطة " .

101 باستعمال الخاصية $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ ، حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

$$1 - z = 2\bar{z} - 2 + 6i$$

ب - $z^2 + z\bar{z} - 4 - 6i = 0$

ج - $|z|^2 + \bar{z}^2 = 8 - 4i$

102 حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ - $2z + i\bar{z} = 5 - 4i$

ب - $z\bar{z} + 2z - 5 - 2i = 0$

ج - $\bar{z}z - 5\bar{z} - 5(1 + 3i) = 0$

103 في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ نعتبر كثير الحدود

p المعرفة بـ :

$p(z) = z^3 - (2 - 3i)z^2 + 9z - 18 + 27i$

(1) عبر عن $\overline{p(z)}$ بدلالة $\bar{z}$

(2) عين العدد المركب α الذي يحقق $p(\alpha) = 0$

و $p(\bar{\alpha}) = 0$

104 z عدد مركب غير معدوم و $z' = \frac{-2}{z}$

A, M و M' نقط من المستوي المركب لواحقها على

ترب $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و z' و z

D هي مجموعة نقط القرص ذي المركز O ونصف

قطر 2 باستثناء النقطة O

أ - عين مجموعة النقط M' لما M تمشح المجموعة

D

ب - عين مجموعة النقط M' لما M تمشح القطعة

المستقيمة $[OA]$ باستثناء النقطة O

105 من أجل كل عدد مركب z يختلف عن -1 نضع

$z = \frac{2 + \bar{z}}{1 + z}$

$z = x + iy$ و $Z = X + iY$ مع x, y, X, Y

أعداد حقيقية. M نقطة من المستوي المركب لاحتها

العدد z

(1) أحسب X و Y بدلالة x و y

(2) برهن أن مجموعة النقط M بحيث يكون Z حقيقيا

هي مستقيم باستثناء نقطة

(3) برهن أن مجموعة النقط M بحيث يكون Z تخيليا

صرفا هي دائرة باستثناء نقطة

106 نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن $-2i$ ، العدد

المركب $Z = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}$

نضع $z = x + iy$ و M نقطة من المستوي المركب

لاحقتها العدد z

(1) برهن أن $\text{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2}$

و $\text{Im}(Z) = \frac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y + 2)^2}$

(2) استنتج طبيعة المجموعتين E و F بحيث

E هي مجموعة النقط M حيث Z حقيقي ؛ و F هي

مجموعة النقط M حيث Z تخيلي صرف

(3) أنشئ المجموعتين E و F

107 A, M و M' نقط من المستوي المركب لواحقها

على الترتيب i, z و z'

نرفق بكل نقطة M تختلف عن A النقطة M' حيث :

$z' = \frac{z^2}{i - z}$

(1) عين النقط M التي تنطبق على صورها M'

(2) برهن أن $\text{Re}(z') = \frac{-x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1 - y)^2}$

(3) استنتج C ، مجموعة النقط M التي تكون من أجلها

M' تنتمي إلى محور الترتيب

أنشئ المجموعة C (وحدة الرسم $3cm$)

108 $z = x + iy$ عدد مركب حيث $z \neq 1$ و x, y

عددان حقيقيان

نعتبر العدد المركب L حيث $L = \frac{z + 2i}{z - 1}$

(1) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري

(2) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون

من أجلها L حقيقيا

(3) برهن أن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا هي دائرة باستثناء نقطة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها .

109 z عدد مركب يختلف عن 1 ، صورته النقطية M في المستوي المركب .

نضع $L = \frac{z+1}{z-1}$ و M' صورة العدد المركب L .

عين مجموعة النقط M في كل حالة من الحالات التالية :
أ- يكون L عددا حقيقيا .

ب- يكون L عددا تخيليا صرفا .

ج- تكون النقط O ، M و M' في استقامية .

3- طويلة وعمدة عدد مركب .

114 في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $a = i\sqrt{2}$ ،

$b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $c = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ على الترتيب .

(1) عين لاحقة النقط G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات (-3) ، $(1+\sqrt{6})$ و $(1-\sqrt{6})$ على الترتيب .

(2) بين أن النقط G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

111 u و v عدنان مركبان غير حقيقيين ، نضع :

$$z = \frac{u - i\bar{v}}{1 - v}$$

برهن أن : z حقيقي "كافئ" $|v| = 1$.

112 a و b عدنان مركبان حيث $|a| = |b| = 1$ و $ab \neq -1$.

$$\text{نضع : } z = \frac{a+b}{1+ab}$$

عبر عن $\bar{z}$ بدلالة a و b ، استنتج أن العدد z حقيقي .

113 z عدد مركب . A و M نقطتان من المستوي المركب لاحتقتهما $1-i$ و z على الترتيب .

C هي مجموعة النقط M التي يكون من أجلها

$$(z-1+i)(\overline{z-1+i}) = 2$$

(1) تحقق أن المبدأ O ينتمي إلى المجموعة C .

(2) عين المجموعة C ثم أنشئها .

114 $z = x + iy$ عدد مركب حيث $z \neq -1$ و x ، y

عددين حقيقيين . M نقطة من المستوي المركب لاحتقها

$$\text{العدد } z \text{ . نضع : } Z = \frac{2iz - i}{z + 1}$$

(1) أحسب $\bar{Z}$ ، $\text{Re}(Z)$ ، $\text{Im}(Z)$ و $|Z|$ بدلالة x و y .

(2) عين المجموعة E_1 للنقط M بحيث يكون $|Z| = 1$.

(3) عين المجموعة E_2 للنقط M التي يكون من أجلها Z تخيليا صرفا .

(4) أرسم المجموعتين E_1 و E_2 وعين نقط تقاطعهما .

115 α عدد مركب غير معدوم طويلته r و θ عمدة له .

$$\text{نعتبر العددين المركبين } z_1 = \alpha i \text{ و } z_2 = \alpha^2$$

(1) أحسب بدلالة r و θ الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين z_1 و z_2 .

(2) حدد r و θ حتى يكون z_1 و z_2 مترافقين .

116 A ؛ B و C نقط من المستوي لواحقتها على

$$\text{الترتيب } z_1 = 1 \text{ ، } z_2 = 2i \text{ و } z_3 = -1-i$$

(1) أحسب $|z_2 - z_1|$ و $|z_3 - z_1|$.

$$(2) \text{ أحسب } \text{Arg} \left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right)$$

(3) استنتج طبيعة المثلث ABC .

4- الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم .

117 أكتب على الشكل المثلثي العدد المركب z في كل

حالة من الحالات التالية .

$$\text{ب- } z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$$

$$\text{أ- } z = (1-i)^2$$

$$\text{د- } z = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$$

$$\text{ج- } z = (1+i)(\sqrt{3}+i)$$

118 أكتب على الشكل المثلثي العدد المركب z في كل

حالة من الحالات التالية .

أ - $z = \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)^6$

ب - $z = \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)^{20}$

ج - $z = (i+1) \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right)$

119 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، أثبت أنه

من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون z حقيقيا .

أ - $z = (-2-2i)^{8n}$ ب - $z = (-1+i\sqrt{3})^{3n}$

ج - $z = (3-i\sqrt{3})^{12n}$

120 نعتبر العدد المركب $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. أثبت أنه من

أجل كل عدد طبيعي n ، $z^{6n+1} = z$

121 يعطى العدد المركب $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

و $z_2 = 1-i$

(1) أعط الشكل المثلثي لكل من الأعداد المركبة z_1 ، z_2

و $\frac{z_1}{z_2}$

(2) أعط الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1}{z_2}$

(3) استنتج أن : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

و $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

122 يعطى العدد المركب $z = \frac{1-3i}{2-i}$

(1) أكتب z على الشكل الجبري ثم استنتج طويلته وعمدة له .

(2) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z^n عددا حقيقيا .

123 يعطى العدد المركب

• $z_2 = -\frac{1}{2}i$ و $z_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

(1) أحسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $z_1 - 2iz_2$

(2) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_1 - 2iz_2)^n$ تخيليا صرفا .

124 نعتبر العدد المركب $z = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

(1) أحسب z^2 ثم عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z^2

(2) عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z

(3) استنتج أن $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

و $\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

125 z ، u و v أعداد مركبة حيث

$u = 3+i\sqrt{3}$ ، $z = (3+\sqrt{3}) + i(-3+\sqrt{3})$

و $v = \frac{z}{u}$

(1) أكتب v على الشكل الجبري .

(2) عين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة u ، v و z

(3) استنتج $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

(4) أثبت أن العدد z^{2010} تخيلي صرف .

126 يعطى العددان المركبان

• $z_2 = 2+i$ و $z_1 = 2+3i$

(1) أكتب $z_1^2 - z_2^2$ على شكله المثلثي .

(2) أكتب العدد المركب $\left(\frac{z_1^2 - z_2^2}{8\sqrt{2}} \right)^{2008}$ على شكله الجبري .

5 - الشكل الأسّي لعدد مركب غير معطوم .

127 نضع $z_1 = -1-i$ و $z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

أ - أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري .

ب - أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي .

ج - استنتج الطويلة عمدة للعدد المركب $\frac{z_1}{z_2}$ ، ثم استنتج

القيمتين المضبوطتين للعدد $\cos \frac{11\pi}{12}$ و $\sin \frac{11\pi}{12}$.

128 نضع : $a = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ و $b = 1 - i$.

(1) أكتب على الشكل الأسّي كلا من الأعداد المركبة a ،

$\frac{a}{b}$ و b .

(2) أكتب العدد $\frac{a}{b}$ على الشكل الجبري .

استنتج القيمتين المضبوطتين للعدد $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$.

(3) حل في المجال $[-\pi; \pi]$ المعادلة

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$$

129 المستوي المركب منسوب إلى المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$

(وحدة الرسم 4cm) .

نعتبر النقط A, B, C, D ذات اللواحق على الترتيب

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ و } c = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}, b = e^{i\frac{\pi}{3}}, a = 1$$

(1) أكتب c على الشكل الأسّي و d على الشكل الجبري .

(2) مثل النقط A, B, C, D في المعلم ثم برهن أن

الرباعي $OACB$ هو معين .

130 θ عدد حقيقي .

عين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة التالية .

$$z_2 = -\cos \theta + i \sin \theta ; z_1 = -e^{i\theta}$$

$$z_3 = \sin \theta - i \cos \theta$$

131 نعتبر العدد المركب z حيث :

$$z = 2 \sin^2 \alpha + i \sin 2\alpha$$

مع α عدد حقيقي من المجال $[0; 2\pi]$.

عين حسب قيم العدد α الكتابة الأسية للعدد المركب z .

132 z عدد مركب حيث $z = 1 + e^{i\theta}$ مع $\theta \in]-\pi; \pi[$

$$(1) \text{ أ - تحقق أن } z = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)$$

ب - استنتج الطويلة وعمدة α للعدد المركب z بدلالة θ .

(2) جد ، بدلالة θ ، الطويلة وعمدة للعدد المركب

$$L = \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta + i \sin \theta}$$

133 نضع $z = e^{2i\frac{\pi}{5}}$ ، $A = z + z^4$ و $B = z^2 + z^3$.

(1) برهن أن $1 + A + B = 0$ و $AB + 1 = 0$.

استنتج أن A و B هما حلان للمعادلة $x^2 + x - 1 = 0$.

(2) بين أن $z^4 = \bar{z}$ ثم عين A بدلالة $\cos \frac{2\pi}{5}$.

(3) حل المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$ واستنتج قيمة $\cos \frac{2\pi}{5}$.

$$(1) \text{ برهن أن : } \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}}}{\sin \frac{\pi}{10}}$$

$$(2) \text{ أحسب المجموع } 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}}$$

(2) عين قيمة لكل من المجموعين S و T حيث

$$T = \sum_{k=0}^4 \sin \frac{k\pi}{5} \text{ و } S = \sum_{k=0}^4 \cos \frac{k\pi}{5}$$

135 في المستوي المركب ، نرفق بكل نقطة m ذات

اللاحقة العدد المركب غير المعدوم z ، النقطة M ذات

$$\text{اللاحقة } Z = \frac{1}{z^2}$$

(1) نضع $z = re^{i\theta}$

أ - أكتب Z على الشكل الأسّي .

ب - Z_0 عدد مركب غير معدوم معطى . هل يمكن إيجاد

$$\text{عدد مركب } z_0 \text{ يحقق } Z_0 = \frac{1}{z_0^2} ?$$

(2) نفرض أن $|z| = 1$.

أ - تعطى النقطة m أنشئ النقطة M .

ب - عين النقط m التي يكون من أجلها $Z = z$.

(3) d مجموعة نقط نصف مستقيم مبدأه O ، باستثناء O .

أ - عين مجموعة النقط M عندما m تمسح المجموعة d .

ب - عين مجموعة النقط m عندما تمسح M المجموعة d .

136 في المستوي المركب ، نرفق بكل نقطة m ذات

اللاحقة العدد المركب z ، النقطة M ذات اللاحقة

$$Z = \frac{z^3}{2+|z|^3}$$

تعطى الكتابة الأسية لكل من العددين المركبين z و Z :

$$z = re^{i\alpha} \text{ و } Z = \rho e^{i\theta}$$

(1) عبر عن ρ و θ بدلالة r و α على الترتيب .

(2) نرسم C الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1 .

A النقطة ذات اللاحقة $1-i$.

أ - عين مجموعة النقط M لما النقطة m تمسح الدائرة C .

ب - عين مجموعة النقط M لما النقطة m تمسح نصف

المستقيم (OA) .

(3) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \frac{x^3}{2+x^3}$$

أ - بين أن الدالة f متزايدة تماماً وعين صورة المجال

$[0; +\infty[$ بواسطة الدالة f .

ب - استنتج أنه من أجل كل نقطة m من المستوي ،

النقطة M تنتمي إلى قرص يطلب تعيينه .

0 - معادلات من الدرجة الثانية .

137 نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة

ذات المجهول z التالية :

$$2z^2 + [1+i(2+\sqrt{3})]z + i - \sqrt{3} = 0$$

1. تحقق من أن i حل لهذه المعادلة .

2. استنتج الحل الآخر وأحسب طويلته وعمده له .

138 (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة ، المعادلة

ذات المجهول z التالية :

$$z^2 + (5-3i)z + 4-8i = 0$$

(2) نعين A و B صورتَي الحلين لهذه المعادلة .

أ - عين لاحقة النقطة G التي تحقق

$$\overline{GO} + \overline{GA} + \overline{GB} = \vec{0}$$

ب - ماذا تمثل النقطة G بالنسبة إلى النقط A ، B

والمبدأ O للمعلم ؟

139 بكالوريا

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات

المجهول z التالية : $z^2 - \alpha(\alpha+i)z + i\alpha^3 = 0$ ،

حيث α عدد مركب طويلته r و θ عمده له .

1 - حل المعادلة المعطاة .

2 - أحسب الطويلة وعمده لكل من الحلين بدلالة r و θ .

3 - حدد r و θ حتى يكون الحلان مترافقين .

140 بكالوريا

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات

المجهول : $\alpha z^2 + (1-i\alpha^2)z + i\alpha = 0$ ، حيث α

عدد مركب معطى .

(1) جد مفكوك $(1+i\alpha)^2$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة المعطاة .

(2) بوضع $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$ احسب الطويلة وعمده

لكل من حل المعادلة .

141 r عدد حقيقي موجب تماماً و θ عدد حقيقي .

α عدد مركب طويلته r و θ عمده له .

(1) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات

المجهول z التالية :

$$z^2 - \alpha z + \alpha^2 = 0$$

(2) عبر بدلالة r و θ على طويلتي الحلين وعمديتهما .

142 نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات

المجهول z التالية :

$$z^2 - (1+i \sin 2\theta)z + \frac{i}{2} \sin 2\theta = 0 \quad (1) \dots$$

حيث θ عدد حقيقي .

(1) حل المعادلة (1) من أجل $\theta = \frac{\pi}{4}$.

(2) أحسب بدلالة θ حلول المعادلة (1) .

- (1) حل في مجموعة المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 + (7-4i)z + 9-15i = 0$.
 نرمز بـ z_0 إلى الحل الذي له أكبر طولية .
 (2) أحسب طولية العدد المركب z_0 وعمدة له .
 (3) n عدد طبيعي . بين أن z_0^n يكون عددا إذا وفقط إذا كان n قابلا للقسمة على 4 .

(4) أحسب $\left(\frac{z_0}{3\sqrt{2}}\right)^{1996}$.

- (144) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، كلا من المعادلتين : $z^2 - 2z + 5 = 0$ ؛
 $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5+2\sqrt{3} = 0$.

- (2) في المستوى المزود بالمعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D صور الأعداد المركبة $1+2i$ ، $1+\sqrt{3}+i$ ، $1-2i$ و $1+\sqrt{3}-i$ على الترتيب .
 أ- ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

- ب- أكتب معادلة للدائرة C المحيطة بالمثلث ABC .
 ج- أثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة C .
 د- أكتب معادلة الدائرة C والنقط A, B, C و D في المعلم المعطى .

(145) θ عدد حقيقي معطى .

- (1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): z^2 - 2z \sin \theta + 1 = 0$.
 (2) في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B لاهقيتهما حلي المعادلة (E) .

عين قيم العدد الحقيقي θ التي يكون من أجلها المثلث OAB متقايس أضلاع .

(146) في المجموعة $\mathbb{C}$ نعتبر المعادلة (E) :

$$z^3 + 2z^2 - 16 = 0$$

- (1) برر أن العدد 2 هو حل للمعادلة (E) .
 (2) جد العددين الحقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد مركب z ،

$$z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(z^2 + az + b)$$

(3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

(147) نضع من أجل كل عدد مركب z ،

$$p(z) = z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i$$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد مركب z ؛

$$p(z) = (z-2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$$

(2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$.

(148) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 + z + 1 = 0$.

(2) استنتج ، في $\mathbb{C}$ ، حلول المعادلة $z^3 - 1 = 0$.

(3) نضع $u = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

أ - أحسب u^2 ، u^3 و u^{2008} .

ب - أحسب $s = u + u^2 + \dots + u^{2008}$.

(149) نعتبر كثير الحدود :

$$p(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$$

(1) عين عددين حقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد مركب z ،

$$p(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$$

(2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$.

(150) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^4 - 1 = 0$.

(2) استنتج ، في $\mathbb{C}$ ، حلول المعادلة $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.

(151) من أجل كل عدد مركب z ، نضع :

$$p(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$$

(1) a عدد حقيقي . عبر بدلالة a عن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب $p(ia)$.

(2) عين قيم a التي يكون من أجلها $p(ia) = 0$.

(3) عين عددين حقيقيين b و c حتى يكون من أجل كل

$$p(z) = (z^2 + 9)(z^2 + bz + c)$$
 ، عدد مركب z ،

(4) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$.

152 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات

$$\frac{(4-6i)z + 1+3i}{2z-1-i} = 2z, \text{ المجهول } z$$

بكالوريا 153

(1) اكتب على الشكل المثلثي العدد المركب $(-1-i)$.

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات

$$\frac{(1-3i)z + 3+i}{z-i} = z, \text{ المجهول } z \text{ التالية}$$

(3) نرمز بالرمز z_0 لحل المعادلة السابقة الذي له أصغر طولية.

$$\text{أحسب العدد المركب } \left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{1984} \text{ وأكتبه على الشكل}$$

الجبري.

— ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد

$$\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^n \text{ عددا حقيقيا ؟}$$

بكالوريا 154

من أجل كل عدد مركب $z \neq 2i$ نعتبر العدد المركب

$$L(z) = \frac{(5-i)z + 2(1+i)}{iz + 2} \text{ بحيث}$$

(1) جد الأعداد المركبة z بحيث $L(z) = z$.

أكتب هذه الأعداد على الشكل المثلثي.

(2) في المستوي المركب لتكن النقطة M التي إحداثياتها

$$(x; y) \text{ ولاحتقتها } z.$$

— أكتب على الشكل الجبري العدد $L(z)$.

— عين الطبيعة الهندسية و العناصر المميزة لمجموعة النقط

M التي لاحقتها z بحيث يكون $L(z)$ عددا تخيليا صرفا.

بكالوريا 155

نعتبر كثير الحدود P للمتغير المركب z المعروف كما يلي:

$$P(z) = z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i$$

(1) أحسب $P(1)$ ؛ استنتج كثير الحدود $Q(z)$ من

الدرجة الثانية بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z :

$$P(z) = (z-1).Q(z)$$

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات

$$\text{المجهول } z : P(z) = 0.$$

(3) النقاط A, B و C صور حلول المعادلة $P(z) = 0$

في المستوي المركب.

— ما هي طبيعة المثلث ABC .

بكالوريا 156

ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعروف كما

$$\text{يلي : } P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (5+4i)z - 5i.$$

(1) تحقق من أن $P(2+i) = 0$ ؛ جد كثير الحدود

$Q(z)$ للمتغير المركب z حتى يكون من أجل كل عدد

$$\text{مركب } z : P(z) = (z-2-i).Q(z).$$

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات

$$\text{المجهول } z : P(z) = 0.$$

(3) لتكن A, B و C صور حلول المعادلة $P(z) = 0$

في المستوي المركب حيث A صورة الحل $(2+i)$.

جد إحداثيات النقطة D حتى تكون النقطة A مركز ثقل

المثلث BCD .

بكالوريا 157

نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعروف

كما يلي:

$$P(z) = z^3 - (3+i)z^2 + (4+i)z + 2i - 4.$$

(1) أحسب $P(2)$ ، جد كثير الحدود $Q(z)$ للمتغير

المركب z بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z :

$$P(z) = (z-2).Q(z)$$

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات

$$\text{المجهول } z : P(z) = 0.$$

(3) في المستوي المركب لتكن A, B و C صور حلول

المعادلة $P(z) = 0$. ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

بكالوريا 158

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E) ذات

المجهول z التالية:

$$z^3 - (6+i)z^2 + (13+i)z - 10 + 2i = 0$$

(1) أثبت أن المعادلة (E) تقبل حلاً حقيقياً z_0 يطلب تعيينه .

(2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (E) . نسمي z_1 الحل الذي جزئه التخيلي سالب و z_2 الحل الثالث .

(3) في المستوى المركب لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 و z_2 .

— جد إحداثيتي النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات: -2 ، 3 و 1 على الترتيب .

— عيّن المجموعة E_M للنقط M من المستوى حيث : $-2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 9$

159 نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$z^3 - (1+i\sqrt{2})z^2 + (1+i\sqrt{2})z - i\sqrt{2} = 0$$

أ - بين أن هذه المعادلة تقبل حلاً تخيلياً صرفاً يطلب تعيينه
ب - حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة المعطاة .

7 - الأعداد المركبة والتحويلات النقطية .

160 بكالوريا

(1) أحسب العدد المركب $(2\sqrt{3}+i)^3$.

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^3 = 18\sqrt{3} + 35i$.

(3) نرسم z_1 ، z_2 و z_3 إلى حلول هذه المعادلة ؛

أ - B و C صورها في المستوى ، على الترتيب .

أ - عيّن زاوية الدوران الذي مركزه مبدأ المعلم O ويحول النقطة B إلى النقطة C .

ب - عيّن صورة بهذا الدوران للمستقيم Δ شعاع توجيهه

$$\vec{w} \text{ حيث : } (\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{2}$$

161 نعتبر العددين المركبين $a = 3 + i\sqrt{3}$ ،

$$b = 2 + \sqrt{3} + 3i$$

A ، B و C نقط من المستوى لواحقها a ، $\bar{a}$ و b على الترتيب .

(1) بين أن المثلث ABO متساوي الساقين ، ثم عيّن z_G لاحقة مركز ثقله G .

(2) ليكن α و β عددين مركبين وليكن T التحويل النقطي في المستوى الذي يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z' = \alpha z + \beta$.

أ - عيّن α و β حيث يكون $T(O) = G$ و $T(A) = C$.

ب - بين أن التحويل T هو دوران يطلب تعيين مركزه وزاويته .

ج - استنتج صورة المستقيم (OA) بالدوران T .

162 المستوى منسوب إلى المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن

النقطتان A و B صورتا العددين المركبين $a = 4 + 2i$ و $b = 3 - i$ على الترتيب .

أ - بين أن المثلث OAB قائم ومتقايس الساقين .

ب - عيّن مركز وزاوية الدوران الذي يحول النقطة A إلى النقطة B ، والنقطة B إلى النقطة O .

ج - لتكن النقطة C صورة النقطة O بهذا الدوران . ما هي طبيعة الرباعي $ABOC$ ؟

163 النقطتان A و B صورتا العددين المركبين

$z_1 = 3 - 2i$ و $z_2 = -1 + 6i$ على الترتيب ، في مستو مزود بالمعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

ω نقطة من حامل محور الفواصل و r الدوران الذي مركزه ω و يحول A إلى B .

— عيّن مركز و زاوية الدوران r .

164 النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب $2i$ ، 6 ، $1+i$ و $3-3i$.

α و β عدنان مركبان ، تحويل نقطي في المستوى

يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z' = 3\alpha z + \beta$.

أ - عيّن α و β علماً أن $t(A) = B$ و $t(C) = D$.

ب - ما هي طبيعة التحويل t مع تعيين عناصره المميزة ؟

في كل التمارين ينسب المستوى المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

168 نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$$

(1) بين أن المعادلة تقبل حلين تخيليين صرفا مترافقين z_0 و $\bar{z}_0$ حيث z_0 جزؤه التخيلي موجبا .

(2) برر أن الحلين الآخرين لهذه المعادلة هما كذلك مترافقين ثم عيّنها . ونرمز بـ z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجبا .

(3) استنتج تحويلا نقطيا يحول $A(z_0)$ إلى $B(z_1)$ ويحول $A'(\bar{z}_1)$ إلى $B'(\bar{z}_0)$

169 A و B نقطتان من المستوى لاحقتهما على الترتيب 1 و 4 .

d هي مجموعة نقط المستقيم (OA) باستثناء النقطة A . Δ هي مجموعة نقط المستقيم العمودي على (OA) باستثناء النقطة A .

Γ هي الدائرة ذات المركز A نصف القطر 1 . نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب Z

$$Z = \frac{z^2}{z-1}$$

لتكن m و M نقطتين من المستوى لاحقتهما z و Z على الترتيب .

I - نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بـ :

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \text{ و } g(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

نسمي D_1 و D_2 مجموعتي تعريف الدالتين f و g على الترتيب .

(1) أدرس اتجاه التغير لكل من الدالتين f و g .

(2) أدرس النهايات للدالتين f و g عند حدود مجموعتي تعريفهما على الترتيب .

(3) أنجز جدولي التغيرات للدالتين f و g ، ثم استنتج الصورتين $f(D_1)$ و $g(D_2)$.

165 $A(2;1)$ و $B(3;0)$ نقطتان من المستوى .

h التحاكي ذو المركز A والنسبة $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ؛ الدوران ذو

المركز B والزاوية $-\frac{\pi}{4}$ ؛ الانسحاب ذو الشعاع $\overline{BO}$.

أ - اكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات الثلاث .

ب - اكتب العبارة المركبة للتحويل $(t \circ r \circ h)$.

ج - عيّن النقطة C حيث $(t \circ r \circ h)(C) = O$.

166 بكالوريا

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - (2+i)z + 3+i = 0$.

نرمز للحلين بـ z_0 و z_1 حيث $|z_0| > |z_1|$.

(2) A, B و C نقط من المستوى لواحقها على الترتيب

z_0, z_1 و z_2 .

أوجد إحداثي النقطة G مركز المسافات المتساوية للنقط

A, B و C .

(3) T التحويل النقطي في المستوى الذي يرفق بكل نقطة

M النقطة M' حيث : $\overline{MM'} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}$.

أ - بين أن $\overline{GM'} = -2\overline{GM}$.

ب - استنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميزة .

ج - اكتب العبارة المركبة للتحويل T .

(4) A', B' و C' صور النقط A, B و C على الترتيب

بالتحويل T . بين أن النقط A', B' و C' في استقامة .

167 A, B و C ثلاث نقط من المستوى المركب ،

لواحقها على الترتيب $z_A = 2+2i$ ، $z_B = 5+5i$ و

$z_C = -2-2i$.

أ - أثبت أن $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ هو عدد حقيقي .

ب - استنتج طبيعة التحويل T الذي يحول B إلى A و C إلى

نقطته الصامدة الوحيدة .

ج - اكتب العبارة المركبة للتحويل T .

د - Γ المنحني ذي المعادلة $y = 3x - \frac{1}{x}$.

اكتب معادلة لصورة المنحني Γ بالتحويل T .

II-1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :
 $Z = 3$. تعطى الحلول على الشكل الجبر ثم على الشكل الأسّي .

(2) نفرض في هذا السؤال أن $z = 1 + e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.
 أحسب Z بدلالة θ ثم استنتج مجموعة النقط M عندما θ يمسح $\mathbb{R}$.

(3) نضع $m(x; y)$ و $M(X; Y)$ في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

أ- عين مجموعة النقط M عندما النقطة m تمشح المجموعة d .

ب- عين مجموعة النقط M عندما النقطة m تمشح المجموعة Δ .

(4) - أحسب X و Y بدلالة x و y .

ب- عين مجموعة النقط m عندما النقطة M تمشح المحور $(O; \bar{u})$.

170 - I- ليكن A و B عددين حقيقيين . نعتبر الدالة

المعرفة من $\mathbb{C}$ في $\mathbb{C}$ بـ : $F(z) = Az + B\bar{z}$.
 (1) أحسب $F(1)$ و $F(i)$.

(2) برهن أنه إذا كان من أجل كل عدد مركب z ،
 $F(z) = 0$ فإن $A = B = 0$.

(3) عين A و B حتى يكون من أجل كل عدد مركب z ،
 $F(z) = z$.

II- ليكن a و b عددين حقيقيين . نعتبر الدالة f

المعرفة من $\mathbb{C}$ في $\mathbb{C}$ بـ : $f(z) = az + b\bar{z}$.

(1) عبر عن $(f \circ f)(z)$ من أجل كل عدد مركب z .
 (2) برهن أن * من أجل كل عدد مركب z ،

$$(f \circ f)(z) = z \text{ * يكافئ } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ab = 0 \end{cases}$$

(3) عين كل الدوال f التي تحقق من أجل كل عدد مركب z ،
 $(f \circ f)(z) = z$ (الدوال f تسمى تضامنية)

III- نعتبر الدالة g المعرفة من $\mathbb{C}$ في $\mathbb{C}$ بـ :

$$g(z) = e^{i\frac{\pi}{4}} \bar{z}$$

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر ، نعتبر النقطتين $M(x; y)$ و $M'(x'; y')$ لاحقتيهما z و z' على الترتيب حيث $z' = g(z)$

(1) برر أنه من أجل كل عدد مركب z ،

$$(g \circ g)(z) = z \text{ . (أي } g \text{ دالة تضامنية)}$$

(2) عبر عن x' و y' بدلالة x و y .

(3) Δ هي مجموعة النقط M بحيث يكون $z' = z$.
 أكتب معادلة للمجموعة Δ .

(4) $\bar{u}(1; \sqrt{2}-1)$ شعاع من المستوي . برهن أنه من

أجل كل نقطة M من المستوي يكون $\bar{u} \cdot \overline{MM'} = 0$.

(5) عين إحداثيتي النقطة I منتصف القطعة $[MM']$ من أجل M نقطة من المستوي . استنتج أن I تنتمي إلى المجموعة Δ .

(6) أعط طريقة هندسية لإنشاء النقطة M' انطلاقا من النقطة M .

171 - I- نعتبر العدد المركب u حيث $u = 1 + i$.

(1) أكتب u و $\bar{u}$ على الشكل الأسّي .

(2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع :
 $s_n = u^n + \bar{u}^n$.

بين أن $s_n = \lambda_n \cos \frac{n\pi}{4}$ مع λ_n عدد حقيقي يطلب تعيينه .

(3) عين قيم العدد الطبيعي n ، التي يكون من أجلها
 $s_n = 0$.

(4) أثبت أنه إذا كان n عددا زوجيا ، فإن s_n يكون عددا صحيحا .

II- نفرض أن $n = 2m$ مع $m \in \mathbb{N}^*$.

(1) باستعمال دستور ثنائي الحدين ، أنشر العددين
 $(1+i)^{2m}$ و $(1-i)^{2m}$.

(2) p عدد طبيعي ، أكتب على أبسط شكل العبارتين
 التاليتين : $i^{2p} + (-i)^{2p}$ و $i^{2p+1} + (-i)^{2p+1}$.

(3) تطبيق : نأخذ $m = 12$

$$\sum_{n=0}^{12} (-1)^n C_{2p}^{2n} = 2^{12} \text{ برهن أن}$$

اختيار من متعدد

في التمرين أدناه ، لكل سؤال يمكن عدة اقتراحات صحيحة ، المطلوب إدلاء بها مبرراً ذلك .

172 بكالوريا

تضع $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2}$.

(1) الشكل الجبري للعدد المركب z^2 هو :

أ. $2\sqrt{2}$ ب. $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

ج. $2 + \sqrt{2} + i(2 - \sqrt{2})$ د. $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

(2) العدد المركب z^2 يكتب على الشكل الأسّي :

أ. $4e^{i\frac{\pi}{4}}$ ب. $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ج. $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$ د. $4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

(3) العدد المركب z يكتب على الشكل الأسّي :

أ. $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$ ب. $4e^{i\frac{\pi}{8}}$

ج. $4e^{i\frac{5\pi}{8}}$ د. $4e^{i\frac{3\pi}{8}}$

173 بكالوريا

تستري المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر .

(1) تعطى النقط A ، B و C ، لواحقها على الترتيب :

$a = -2 + 3i$ ؛ $b = -3 - i$ و $c = 2,08 + 1,98i$.

ثلاث ABC هو :

أ. متساوي الساقين وغير قائم .

ب. قائم وغير متساوي الساقين .

ج. متساوي الساقين وقائم .

د. لا قائم ولا متساوي الساقين .

(2) لكل عدد مركب $z \neq -2$ نرفق العدد المركب z' حيث :

$$z' = \frac{z - 4i}{z + 2}$$

مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|z'| = 1$ هي :

أ. دائرة مركزها 1 . مستقيم .

ج. دائرة مركزها 1 باستثناء نقطة .

د. مستقيم باستثناء نقطة .

مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث z' حقيقي هي :

أ. دائرة مركزها 1 . مستقيم .

ج. دائرة مركزها 1 باستثناء نقطة .

د. مستقيم باستثناء نقطة .

أصحيح أم خطأ ؟

174 في كل اقتراح أذكر إن كانت الجملة صحيحة أم خاطئة مبرراً ذلك .

(1) النقط A ، B و C ذات اللواحق $a = e^{i\theta}$ ،

$b = e^{i(\theta + \frac{2\pi}{3})}$ و $c = e^{i(\theta - \frac{2\pi}{3})}$ على الترتيب ، تعين

مثلاً متقايس أضلاع .

(2) إذا كان Δ المستقيم الذي يشمل $A(i)$ ، و $\overline{w}(1+i)$

شعاع توجهي له ، فإن Δ هو مجموعة النقط $M(z)$

حيث $\arg(z - i) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ مع k عدد صحيح .

(3) إذا كانت $A(3+2i)$ ، $B(3i)$ و $C(1+i)$ فإن

المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين .

175 ميز بين الجمل الصحيحة والجمل الخاطئة مبرراً

في كل مرة جوابك .

(1) من أجل كل عدد مركب z يكون $|z| = |iz|$.

(2) كل عدد مركب z يكون له نفس الجزء الحقيقي للعدد

المركب iz .

(3) إذا كان $|z| = 1$ فإن $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

(4) عدد مركب غير معدوم . يكون $Z = 2iz$ ، إذا وفقط

إذا ، كان $\left|\frac{Z}{z}\right| = 2$ و $\arg\left(\frac{Z}{z}\right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ مع k

عدد صحيح .

176 في كل اقتراح بين إن كانت العبارة صحيحة أم

خاطئة .

(1) θ و r عدنان حقيقيا ، لدينا $\arg(re^{i\theta}) = \theta + 2\pi k$

مع k عدد صحيح .

(2) θ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ لدينا :

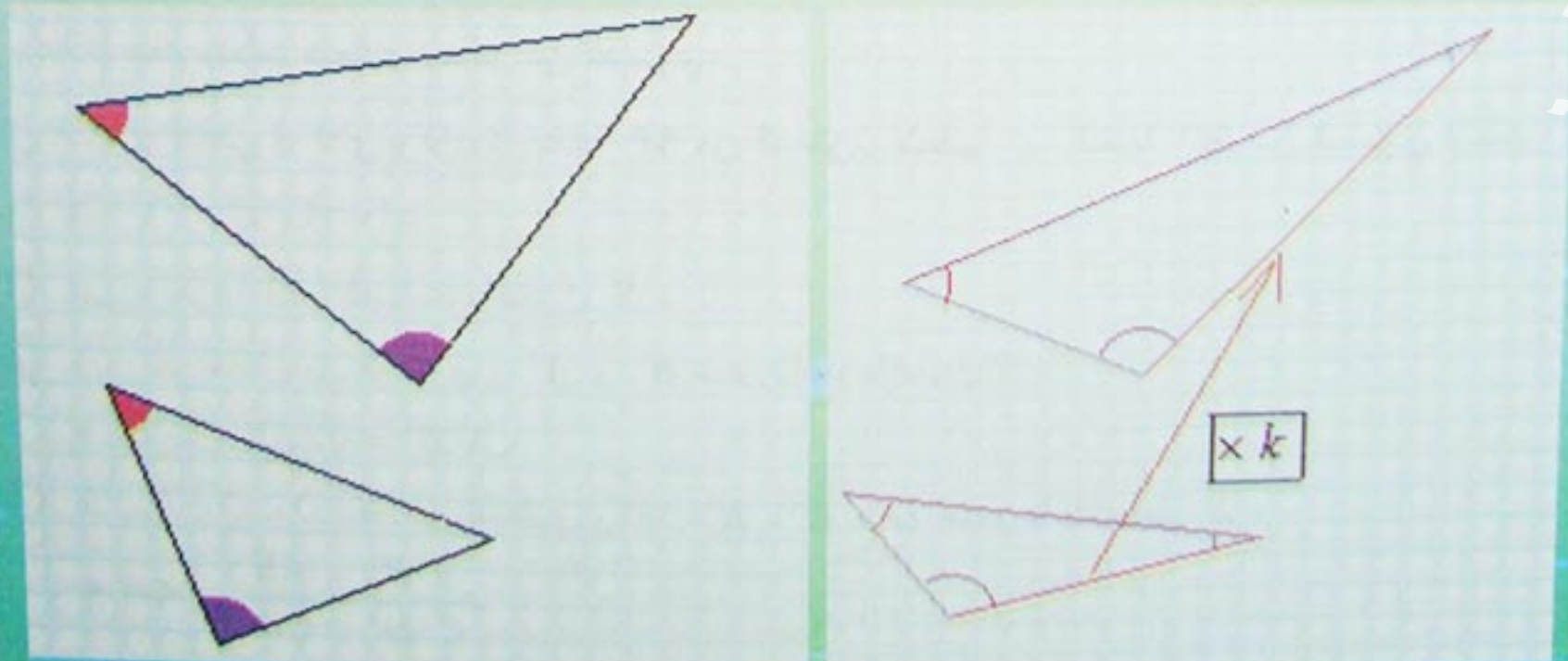
$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = i \tan \theta$$

(3) θ عدد حقيقي لدينا $e^{i\theta} = -e^{-i\theta}$.

(4) n عدد طبيعي ، العدد $\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2}$ هو حقيقي .

الكفاءات المستهدفة

- ◆ التعرف على تشابه مباشر.
- ◆ التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة.
- ◆ تركيب تشابهين مباشرين.
- ◆ تعيين التحليل القانوني لتشابه مباشر بواسطة الأعداد المركبة.
- ◆ توظيف التحليل القانوني لتشابه مباشر بواسطة الأعداد المركبة.
- ◆ توظيف خواص التشابهات المباشرة لحل مسائل هندسية.



نشاط أول

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي إحداثياتها $(x; y)$ النقطة M' من المستوي

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y \\ y' = x + y\sqrt{3} \end{cases} \text{ حيث } (x'; y')$$

- (1) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل S .
- (2) A و B نقطتان من المستوي ، و A' و B' صورتاهما بالتحويل S .
• أثبت أن $A'B' = 2AB$.
- (3) A, B, C, D نقط من المستوي و A', B', C', D' صورها بالتحويل S .
• أثبت أن $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$.
- (4) بوضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ أكتب z' بدلالة z .
- (5) لتكن النقط $K(3, 0)$ ، $L(0, -2)$ و $P(3, -2)$.
نسمي K', L', P' صور K, L, P على الترتيب بالتحويل S .
• ما هي طبيعة المثلثين PKL و $P'K'L'$ ؟
• أحسب مساحة المثلث PKL ثم مساحة المثلث $P'K'L'$.

نشاط ثان

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحققتها z النقطة M' من المستوي لاحققتها z'

$$\text{حيث } z' = (1 - i)z + 1 - 2i$$

- (1) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل S .
- (2) A و B نقطتان من المستوي و A' و B' صورتاهما بالتحويل S .
• أثبت أن $A'B' = \sqrt{2}AB$.
- (3) A, B, C, D نقط من المستوي و A', B', C', D' صورها بالتحويل S .
• أثبت أن $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$.
- (4) بوضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ أكتب z' بدلالة z .
أكتب x' و y' بدلالة x و y . ثم أكتب x و y بدلالة x' و y' .

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

I.

ليكن التحويل النقطي R الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي إحداثياتها $(x; y)$ النقطة M' من المستوي

$$\begin{cases} x' = 1 + y \\ y' = 1 - x \end{cases} \text{ حيث } (x'; y')$$

- (1) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل R .
- (2) بوضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ أكتب z' بدلالة z .
- استنتج طبيعة التحويل R و عناصره المميزة.
- (3) أثبت أن R تقايس.
- (4) عين (D') صورة المستقيم (D) ذي المعادلة $2x - 3y - 1 = 0$ بالتحويل R . أذكر لماذا $(D') \perp (D)$ ؟

II.

ليكن التحويل النقطي H الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي إحداثياتها $(x; y)$ النقطة M' من المستوي

$$\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y \end{cases} \text{ حيث } (x'; y')$$

- (1) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل H .
- (2) بوضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ أكتب z' بدلالة z .
- استنتج طبيعة التحويل H و عناصره المميزة.
- (3) هل H تقايس؟
- (4) عين (Δ) صورة المستقيم (D) ذو المعادلة $2x - 3y - 1 = 0$ بالتحويل H . ما هي الوضعية النسبية للمستقيمين (Δ) و (D) ؟

III.

- (1) عين العبارة التحليلية ثم العبارة المركبة للتحويل $H \circ R$. (هو تركيب التحويلات النقطية).
 - (2) عين العبارة التحليلية ثم العبارة المركبة للتحويل $R \circ H$.
 - (3) ماذا تلاحظ؟
 - (4) A, B, C, D نقط من المستوي و A', B', C', D' صورها بالتحويل $R \circ H$.
- أثبت أن $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$.
- (5) عين (C') صورة الدائرة (C) التي مركزها $A(-1, -1)$ و نصف قطرها 4 بالتحويل $R \circ H$.

١. التشابه المباشر.

في كل ما يأتي، المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overline{OI}, \overline{OL})$.

1. تعريف .

تعريف: القول أن التحويل النقطي S تشابه مباشر معناه أن S يحافظ على نسب المسافات و على الزوايا الموجهة أي من أجل كل نقط M, N, P, Q من المستوي و $M \neq N$ ، صورها M', N', P', Q' على الترتيب فإن:

$$\left(\overrightarrow{M'N'}; \overrightarrow{P'Q'} \right) = \left(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{PQ} \right) \text{ و } \frac{P'Q'}{M'N'} = \frac{PQ}{MN}.$$

2. نسبة تشابه مباشر .

خاصية: إذا كان S تشابهها مباشرا فإن S يضرب المسافات في عدد حقيقي موجب تماما k .
العدد k يسمى نسبة التشابه S .

البرهان: ليكن S تشابهها مباشرا، من أجل كل نقط M, N, P, Q من المستوي و $M \neq N$ ، صورها M', N', P', Q' على الترتيب لدينا $\frac{P'Q'}{M'N'} = \frac{PQ}{MN}$ و منه $\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{M'N'}{MN}$ و بالتالي النسبة $\frac{M'N'}{MN}$ تساوي عددا ثابتا k حيث k عدد حقيقي موجب تماما. و منه $M'N' = k MN$.

حالة خاصة: إذا كان $k = 1$ نقول عن التشابه المباشر S أنه تقايس موجب أو إزاحة أي S انسحاب أو دوران.

2. زاوية تشابه مباشر .

تعريف: S تشابه مباشر من المستوي S يحافظ على الزوايا الموجهة $\left(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'} \right) = \left(\overrightarrow{PQ}; \overrightarrow{P'Q'} \right)$.
و منه الزاوية $\left(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'} \right)$ زاوية ثابتة مستقلة عن اختيار النقطتين M و N
هذه الزاوية $\left(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'} \right)$ تسمى زاوية التشابه المباشر S .

3. التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة .

خاصية: كل تشابه مباشر من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z' = az + b$ حيث a و b عدنان مركبان و $a \neq 0$.

البرهان: O هي نقطة لاحقته 0 ، I نقطة لاحقته 1 و M نقطة لاحقته z

صور $O'(p'), L'(q'), M'(z')$ على الترتيب بالتشابه المباشر S

من $\frac{O'M'}{O'I'} = \frac{OM}{OI}$ و $\left(\overrightarrow{O'I'}; \overrightarrow{O'M'} \right) = \left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM} \right)$ (مع $M \neq 0$)

و منه نستنتج $\left| \frac{z' - p'}{q' - p'} \right| = \left| \frac{z - 0}{1 - 0} \right|$ و $\arg \left(\frac{z' - p'}{q' - p'} \right) = \arg \left(\frac{z - 0}{1 - 0} \right)$ و بالتالي $z' = (q' - p')z + p'$

بوضع $a = q' - p'$ و $O \neq I$ و بالتالي $p' \neq q'$ و $a \neq 0$ و $b = p'$ يمكن التأكيد أن الصيغة المركبة

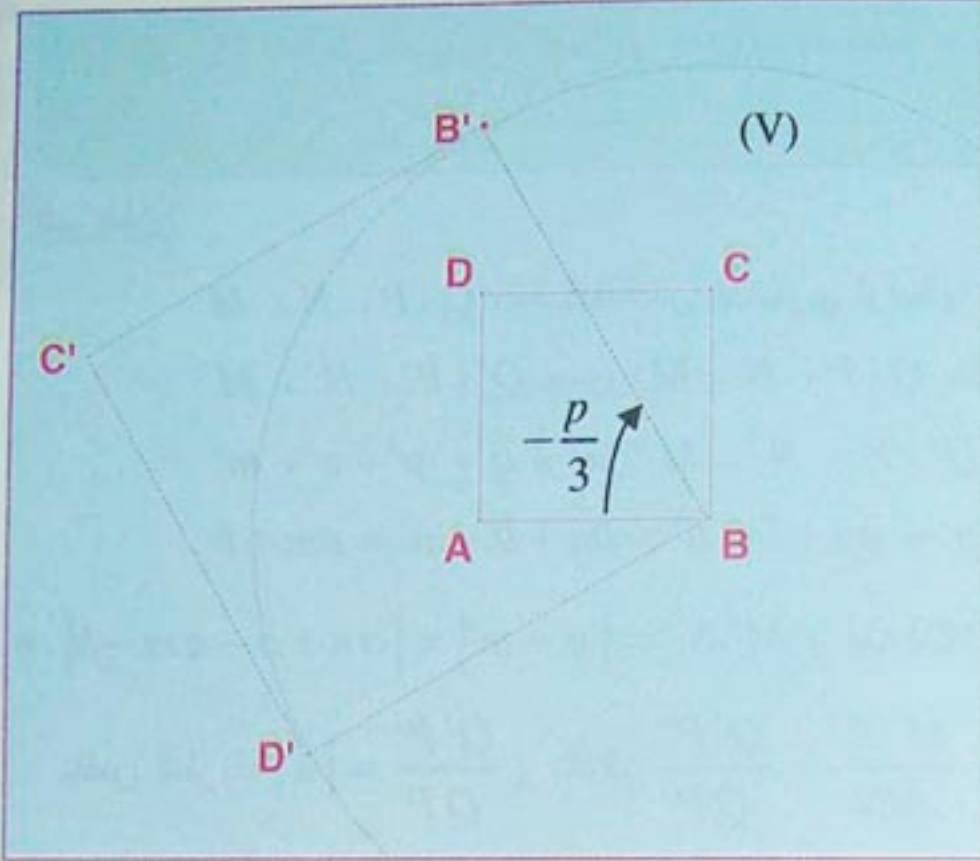
لـ S هي $z' = az + b$ مع $a \neq 0$.

تمرين محلولة 1: $ABCD$ مربع مباشر من المستوى .

S التشابه المباشر الذي نسبته 2 و زاويته $\frac{2p}{3}$.

نفرض $S(A) = B$.

أنشئ النقط B', C', D' صور B, C, D على الترتيب بالتشابه المباشر S



طريقة: لإنشاء صور نقط بتشابه مباشر S يمكن:

- استعمال المحافظة على الزوايا .
- استعمال النسبة k و الزاوية q لـ S أي

$$\begin{cases} M'N' = k MN \\ (\overline{MN}; \overline{M'N'}) = q \end{cases}$$

الحل: النقطة B' معرفة كما يلي :

$$\text{حيث } t \text{ عدد صحيح} \begin{cases} BB' = 2AB \\ (\overline{AB}; \overline{BB'}) = \frac{2p}{3} + 2pt \end{cases}$$

أي النقطة B' تنتمي إلى الدائرة (V) التي مركزها B

و نصف قطرها $2AB$ وكذلك $(\overline{AB}; \overline{BB'}) = \frac{2p}{3}$

أي $(\overline{BA}; \overline{BB'}) = -\frac{p}{3}$ يعني النقطة B' تنتمي إلى نصف المستقيم (Bl) الذي يكون الزاوية $-\frac{p}{3}$ مع المستقيم

(BA) . بما أن $ABCD$ مربع والتشابه المباشر يحافظ على نسب المسافات و الزوايا الموجهة فإن $BB'C'D'$ مربع

وهذا يجعلنا ننشئ C' و D'

تمرين محلولة 2: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overline{OI}, \overline{OJ})$.

ليكن S التشابه المباشر الذي بكل نقطة M لاحقتها z يرفق النقطة M' لاحقتها z' حيث:

$$z' = (1+i)z - 2i$$

(1) عين A' صورة النقطة $A(1, -1)$.

(2) عين B' صورة النقطة $B(0, 1)$.

(3) عين k نسبة التحويل S .

الحل: (1) $S(A) = A'$ و منه $z_{A'} = (1+i)(1-i) - 2i = 2 - 2i$ أي $A'(2, -2)$.

(2) $S(B) = B'$ و منه $z_{B'} = (1+i)(i) - 2i = -1 - i$ أي $B'(-1, -1)$.

(3) التشابه المباشر يحافظ على نسب المسافات و منه $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{|z_{B'} - z_{A'}|}{|z_B - z_A|}$

$$k = \frac{|-1-i-2+2i|}{|i-1+i|} = \frac{|-3+i|}{|-1+2i|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2} \text{ إذن}$$

١. خواص التشابه المباشر (1).

في كل ما يأتي، المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overline{OA}, \overline{OB})$.

1. تحويل نقطي كتابته المركبة $z' = az + b$.

خاصية: a و b عدنان مركبان حيث $a \neq 0$.

إذا كان S تحويلًا نقطيًا من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z' = az + b$ ، فإن S تشابه مباشر نسبته $|a|$.

البرهان:

M, N, P, Q نقط كيفية من المستوي لواحقها m, n, p, q على الترتيب.

M', N', P', Q' صور M, N, P, Q على الترتيب بالتحويل S .

m', n', p', q' لواحق M', N', P', Q' على الترتيب.

$$m' = am + b, n' = an + b, p' = ap + b, q' = aq + b$$

$$\frac{M'N'}{MN} = |a| \text{ منه } M'N' = |a| \times MN \text{ و } M'N' = |n' - m'| = |an + b - am - b|$$

$$\frac{M'N'}{Q'P'} = \frac{MN}{QP} \text{ أي } \frac{M'N'}{MN} = \frac{Q'P'}{QP} \text{ و بالتالي } \frac{Q'P'}{QP} = |a|$$

و منه S يحافظ على نسب المسافات.

$$\frac{q' - p'}{n' - m'} = \frac{aq - ap}{an - am} = \frac{q - p}{n - m} \text{ منه } \frac{q' - p'}{n' - m'} = \frac{aq + b - ap - b}{an + b - am - b}$$

$$\arg\left(\frac{q' - p'}{n' - m'}\right) = \arg\left(\frac{q - p}{n - m}\right) \text{ أي } (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$$

و منه S يحافظ على الزوايا.

S يحافظ على نسب المسافات و يحافظ على الزوايا إذن S تشابه مباشر. وبما أن $M'N' = |a| \times MN$ فإن $|a|$ هي نسبة التشابه المباشر S .

ملاحظة: لا توجد تشابهات أخرى كتابتها المركبة تختلف عن $z' = az + b$ مع $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$.

2. حالات خاصة.

(1) الانسحاب تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z' = z + b$ و هو من الشكل $z' = az + b$ مع $a = 1$. نسبة

التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي 1.

(2) التحاكي تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z' = az + b$ حيث a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1.

نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي $|a|$.

(3) الدوران تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z' = az + b$ حيث a عدد مركب غير حقيقي، طويلته تساوي 1.

نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي 1.

زاوية التشابه المباشر في هذه الحالة هي زاوية الدوران أي $\arg(a)$.

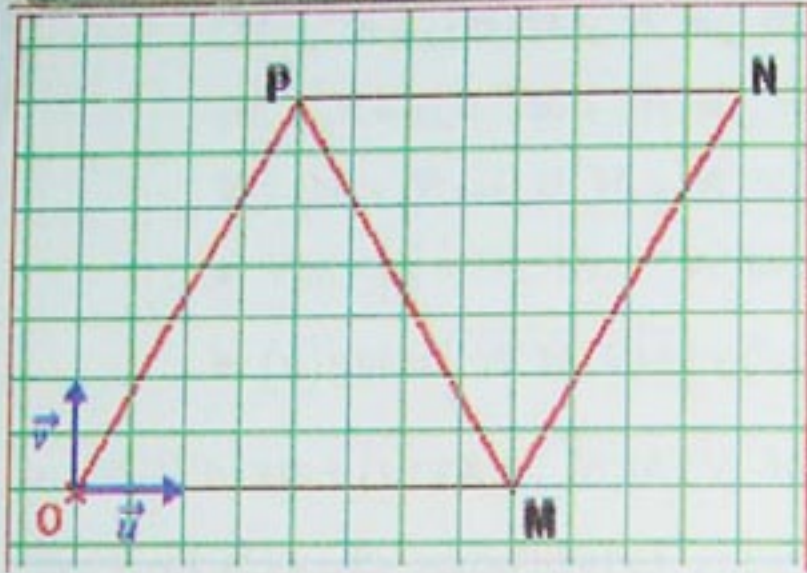
تمرين محلولة 1: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

من أجل كل نقطة M من المستوي، نعتبر المعين المباشر $OMNP$ حيث $MP = OM$.
أثبت أن النقطة N صورة النقطة M بتشابه مباشر يطلب تعيين نسبته.

طريقة: للبرهان على أن تحويل نقطي تشابه مباشر يكفي إيجاد كتابته المركبة من الشكل:

$$z' = az + b \quad \text{مع } a \neq 0 \text{ و } b \text{ عدنان مركبان حيث}$$

$|a|$ نسبة التشابه المباشر هي



الحل: المثلث OMP مثلث متقايس الأضلاع مباشر إذن P هي

صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ليكن r هذا

دوران. الكتابة المركبة للدوران r هي $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$.

$$\cdot z_N = z_M + z_P, \text{ إذن } \overline{ON} = \overline{OM} + \overline{OP}$$

$$\cdot z_P = e^{i\frac{\pi}{3}} z_M \text{ و منه } r(M) = P$$

$$\cdot z_N = z_M + e^{i\frac{\pi}{3}} z_M = \left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) z_M = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} z_M \text{ وبالتالي:}$$

إذن صورة M بالتحويل النقطي الذي كتابته المركبة $z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} z$ وهي الكتابة المركبة للتشابه المباشر

$$\text{الذي نسبته } \left| \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{3}$$

تمرين محلولة 2: أذكر طبيعة التحويل S المعروف بكتابه المركبة في كل حالة من الحالات الآتية:

$$\cdot z' = 3z - 5i \quad (2)$$

$$z' = iz + 1 - i \quad (1)$$

$$\cdot z' = (1 + i)z + i \quad (4)$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - 1 \quad (3)$$

$$\cdot z' = (1 - i)z + i - 3 \quad (6)$$

$$z' = z - 1 + 5i \quad (5)$$

الحل: (1) $|i| = 1$ إذن S دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$.

(2) $a = 3$ عدد حقيقي إذن S تحاكي نسبته 3.

(3) $\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$ إذن S دوران زاويته $-\frac{\pi}{3}$.

(4) $|a| = |1 + i| = \sqrt{2}$ إذن S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$.

(5) $a = 1$ إذن S انسحاب شعاعه $\vec{u}(-1; 5)$.

(6) $|a| = |1 - i| = \sqrt{2}$ إذن S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$.

لـ خواص التشابه المباشر (2).

في كل ما يأتي، المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0; \overline{0I}, \overline{0J})$.

1. ترکیب تشابهین مباشرین .

خاصية: تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين و زاويته مجموع الزاويتين .

البرهان: S تشابه مباشر عبارته المركبة $z' = az + b$ حيث a و b عدنان مركبان و $a \neq 0$.

L تشابه مباشر عبارته المركبة $z' = a'z + b'$ حيث a' و b' عدنان مركبان و $a' \neq 0$.

M' و N' صورتا M و N على الترتيب بالتحويل S .

M_1 و N_1 صورتاً M' و N' على الترتيب بالتحويل L .

إذن M_1 و N_1 صورتا M و N على الترتيب بالتحويل $L \circ S$.

$M_1N_1 = |a'| \times |a| \times MN$ وبالتالي $M_1N_1 = |a'| \times M'N'$ و $M'N' = |a| \times MN$ •

$$\cdot (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M_1N_1}) = \arg(a'), (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \arg(a) \bullet$$

و بالتالي $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}\right) = \arg(a) + \arg(a')$ أي $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) + \left(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M_1N_1}\right) = \arg(a) + \arg(a')$

این $L \circ S$ تشابه مباشر نسبت به $|a| \times |a'|$ و زاویه $\arg(a) + \arg(a')$ و $L \circ S = S \circ L$

5. التحليل القانوني لتشابه مباشر.

خاصية: S تشابه مباشر نسبته k ($k \in \mathbb{R}_+^*$) و زاويته q ($q \in \mathbb{R}$).

• إذا كان $k=1$ و $q=0$ التَّشَابُه S انسحاب .

• في الحالات الأخرى S يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω لاحقاً w و $S = h \circ r = r \circ h$ ، حيث h هو

التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k و r هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته q .

البرهان: S تشابه مباشر كتابته المركبة $z' = az + b$ أي $z' = ke^{iq}z + b$ حيث a و b عددان مركبان و $a \neq 0$.

• $k=1$ و $q=0$ معناه $a=1$ و الكتابة المركبة تصبح $z'=z+b$ إذن S انسحاب شعاعه $\vec{U}$ حيث $\vec{U}$ صورة

العدد المركب b (إذا كان زيادة على هذا $b = 0$ فإن S التحويل المطابق).

• $(a \neq 1) \ k \neq 1$. لتكن M نقطة صامدة بالتساوي S .

$S(M) = M$ يعني $z = az + b$ ومنه $z = \frac{b}{1-a}$ إذن S يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω لاحقها $w = \frac{b}{1-a}$

h التحاكى الذي مركزه Ω و نسبته k كتابته المركبة $z' = kz + b$. وبالتالي $z' - w = k(z - w)$.

r الدوران الذي مركزه Ω ، زاويته θ كتابته المركبة $z' = e^{i\theta} z + b$. وبالتالي $z' - w = e^{i\theta} (z - w)$.

M' صورة M بالتحاكي h و M_1 صورة M' بالدوران r . إذن M_1 صورة M بالدوران $h \circ r$.

$$z_{M_1} - w = e^{iq}(z_{M'} - w), \quad z_{M_1} - w = k(z_M - w)\zeta^{\frac{1}{2}}$$

و بالتالي $z_{M_1} - w = e^{iq} (k(z_M - w) + w - w)$ أي $z_{M_1} - w = ke^{iq} (z_M - w)$

ومنه M_1 صورة M بالتحويل S وبالتالي $h \circ r = S$. بنفس الطريقة نثبت أن $r \circ h = S$.

S تشابه مباشر مرکزہ Ω نسبتہ k و زاویہ q .

تمرين محلولة 1: لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوي .

ليكن الدوران r_1 الذي مركزه A و زاويته $\frac{P}{2}$ و ليكن الدوران r_2 الذي مركزه B و زاويته $-\frac{P}{6}$.

نضع $f = r_2 \circ r_1$.

(1) أثبت أن f دوران يطلب تعيين زاويته.

(2) أنشئ النقطة A' صورة A بالتحويل f و Ω مركز الدوران f .



الحل: (1) f تركيب تشابهين مباشرين (الدوران

تشابه مباشر نسبته 1) إذن فهو تشابه مباشر نسبته 1 (جداء

النسبتين) و زاويته $\frac{P}{3}$ (مجموع الزاويتين $\frac{P}{2} - \frac{P}{6}$) .

بما أن الزاوية غير معدومة f ليس انسحاب

و بالتالي f له مركز ليكن Ω هذا المركز .

ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 1 (التطبيق المطابق) و r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{P}{3}$.

$f = r \circ h = r$ إذن f دوران مركزه Ω زاويته $\frac{P}{3}$.

(2) $f(A) = (r_2 \circ r_1)(A) = A'$ بما أن $r_1(A) = A$ (مركز الدوران r_1) فإن $A' = r_2(A)$

إذن لدينا $BA' = BA$ و $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}) = -\frac{P}{6}$. و منه إنشاء النقطة A' .

$f(A) = A'$ و منه لدينا $\Omega A' = \Omega A$ و $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) = \frac{P}{3}$. إذن المثلث $AA'\Omega$ مثلث مباشر متقايس الأضلاع

و منه إنشاء Ω .

تمرين محلولة 2: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

S_1 التشابه المباشر الذي كتابته المركبة $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i \right) z + 3i$

S_2 التشابه المباشر الذي كتابته المركبة $z' = (\sqrt{3} + i)z + 3 - 3\sqrt{3}i$

عين طبيعة التحويل $S_1 \circ S_2$.

الحل: $(S_1 \circ S_2)(M) = S_1(S_2(M)) = S_1(M_1) = M'$

$S_1(M_1) = M'$ يعني $z_{M'} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i \right) z_{M_1} + 3i$

$S_2(M) = M_1$ يعني $z_{M_1} = (\sqrt{3} + i)z_M + 3 - 3\sqrt{3}i$

$z_{M'} = z_M$ و منه $z_{M'} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i \right) ((\sqrt{3} + i)z_M + 3 - 3\sqrt{3}i) + 3i$

و بالتالي $S_1 \circ S_2$ هو التطبيق المطابق .

لـ خواص التشابه المباشر (3).

في كل ما يأتي، المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

1. تعيين تشابه مباشر.

خاصية: إذا كان S تشابها مباشرا مركزه Ω ونسبته $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ وزاويته q فإن :

$$S(\Omega) = \Omega$$

• من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن Ω

$$\begin{cases} \Omega M' = k \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) = q \end{cases} \text{ تعني } S(M) = M'$$

البرهان: ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k و r الدوران الذي مركزه Ω وزاويته q .

$$S = h \circ r = r \circ h$$

$$S(\Omega) = (h \circ r)(\Omega) = h[r(\Omega)] = h(\Omega) = \Omega$$

• لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن Ω و M_1 صورتها بالدوران r و M' صورة M_1 بالتحاكي h .

$$S(M) = (h \circ r)(M) = h[r(M)] = h(M_1) = M'$$

$h(M_1) = M'$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M_1}$ و منه $\Omega M' = k \Omega M_1$ وبما أن $k > 0$ فإن $\Omega M' = k \Omega M_1$.

$$\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1} \right) = q \text{ يعني } r(M) = M_1$$

من $\Omega M' = k \Omega M$ و $\Omega M_1 = \Omega M$ نستنتج $\Omega M' = k \Omega M$

بما أن $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M_1}$ و $k > 0$ نستنتج أن $\overrightarrow{\Omega M_1}$ و $\overrightarrow{\Omega M'}$ متوازيان و لهما نفس الاتجاه ، و منه

$$\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1} \right) = \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) = q$$

2. التشابه المباشر و نقط المستوي.

خاصية: إذا كانت A, B, A', B' أربع نقط حيث $A \neq B$ و $A' \neq B'$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول

A إلى A' و يحول B إلى B' .

البرهان: ليكن S تشابها مباشرا كتابته المركبة $z' = az + b$ مع $a \neq 0$ و $z_A, z_B, z_{A'}, z_{B'}$ للاحق

A, B, A', B' على الترتيب حيث $A \neq B$ و $A' \neq B'$.

$$\begin{cases} z_{A'} = a z_A + b \\ z_{B'} = a z_B + b \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} S(A) = A' \\ S(B) = B' \end{cases}$$

بما أن $A' \neq B'$ فإن $a \neq 0$ و التشابه S وحيد.

نتائج: • S هو التشابه المباشر الذي يحول A إلى A' و يحول B إلى B' .

• إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ فإن S هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AA'}$ لأن $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} = 1$

• إذا كان $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ فإن S هو تشابه مباشر نسبته $\frac{A'B'}{AB}$ و زاويته $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'} \right)$. مركزه النقطة الصامدة.

تمرين محلول 1: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن النقط A, B, C, D التي لواحقتها $z_A = 1, z_B = -3 - 5i, z_C = -4 + 5i, z_D = -3$ على الترتيب.

عين التشابه المباشر الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D . ثم عين عناصره المميزة.

الحل: ليكن S التشابه المباشر المطلوب.

الكتابة المركبة للتحويل S هي $z' = az + b$ حيث a عدد مركب غير معدوم و b عدد مركب.

لدينا $z_D = az_C + b$ و $z_B = az_A + b$

$$\text{أي } \begin{cases} -3 - 5i = a + b \\ -3 = (-4 + 5i)a + b \end{cases} \text{ بالطرح طرفاً من طرف } 5i = (-5 + 5i)a$$

$$\text{ومنه } a = \frac{5i}{-5 + 5i} = \frac{i}{-1 + i} = \frac{i(-1 - i)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

من المعادلة $-3 - 5i = a + b$ نستخرج b ، $b = -3 - 5i - a$

$$\text{وبالتالي } b = -3 - 5i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2}i$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) z - \frac{7}{2} - \frac{9}{2}i \text{ يعني } S(M) = M'$$

$$w = \frac{b}{1-a} = \frac{-\frac{7}{2} - \frac{9}{2}i}{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right)} = \frac{-7 - 9i}{1 + i} = \frac{(-7 - 9i)(1 - i)}{2} \text{ أي } S \text{ مركزها } w \text{ لاحتقتها } \Omega$$

$$\text{وبالتالي } w = -8 - i \text{ أي } \Omega(-8, -1). \text{ نسبة } S \text{ هي } |a| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ وزاويته } \arg(a) = -\frac{p}{4}$$

تمرين محلول 2: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن النقط A, B, C التي لواحقتها $z_A = i, z_B = -2 + 3i, z_C = -4 + 5i$ على الترتيب.

عين التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول C إلى B .

الحل: ليكن S التشابه المباشر المطلوب.

الكتابة المركبة للتحويل S هي $z' = az + b$ حيث a عدد مركب غير معدوم و b عدد مركب.

لدينا $z_B = az_C + b$ و $z_A = az_A + b$

$$\text{أي } \begin{cases} i = ai + b \\ -2 + 3i = (-4 + 5i)a + b \end{cases} \text{ بالطرح طرفاً من طرف } 2 - 2i = (4 - 4i)a$$

$$\text{ومنه } a = \frac{2 - 2i}{4 - 4i} = \frac{1}{2}$$

$$\text{من المعادلة } i = ai + b \text{ نستخرج } b = i - ai, \text{ وبالتالي } b = i - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}i$$

$$z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i \text{ يعني } S(M) = M' \text{ و منه } S \text{ تحاك.}$$

تحويل نقطي كتابته المركبة $z' = a\bar{z} + b$

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

ليكن التحويل النقطي T من المستوي الذي بكل نقطة M من المستوي لاحقها z يرفق النقطة M' من المستوي لاحقها z' حيث أن : $z' = -3i\bar{z} + 2 + 6i$. (العدد $\bar{z}$ هو مرافق العدد z) .

ليكن التحويل النقطي T' من المستوي الذي بكل نقطة M_1 من المستوي لاحقها z_1 يرفق النقطة M'_1 من المستوي لاحقها z'_1 حيث أن : $z'_1 = 4i\bar{z}_1 + 2 - i$. (العدد $\bar{z}_1$ هو مرافق العدد z_1) .

- (1) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل T .
- (2) نضع $M(x, y)$ و $M'(x', y')$. عين x' و y' بدلالة x و y ثم x' و y' بدلالة x و y .
- (3) عين طبيعة التحويل $T \circ T$ و عناصره الهندسية.
- (4) عين صورة المستقيم (D) الذي معادلته $x + 2y - 1 = 0$
- (5) أثبت أن T مركب من التناظر العمودي بالنسبة إلى حامل محور الفواصل يتبعه تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة .
- (6) أثبت أن T مركب من التحاكي h الذي مركزه A النقطة الصامدة بالتحويل T و نسبته 3- يتبعه التناظر العمودي بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي يشمل A و معامل توجيهه 1 .
- (7) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل T' .
- (8) نضع $M_1(x_1, y_1)$ و $M'_1(x'_1, y'_1)$. عين x'_1 و y'_1 بدلالة x_1 و y_1 ثم x'_1 و y'_1 بدلالة x_1 و y_1 .
- (9) عين التحويل $T \circ T'$.
- (10) عين التحويل $T' \circ T$.

المثلثات المتشابهة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

ليكن التحويل النقطي S من المستوي الذي بكل نقطة M من المستوي لاحقها z يرفق النقطة M' من المستوي لاحقها z' حيث أن : $z' = (1-i)z + 2 + 6i$.

لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A = -1 - i$ ، $z_B = -1 + 2i$ ، $z_C = 3 + i$ على الترتيب .

- (1) عين طبيعة التحويل S و عناصره المميزة .
- (2) عين لواحق النقط A' ، B' و C' صور A ، B و C بالتحويل S على الترتيب .
- (3) أثبت أن النقط A ، B و C ليست على استقامية .
- (4) أحسب أطوال أضلاع المثلث ABC .
- (5) أثبت أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان .

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

ليكن التحويل النقطي S من المستوي الذي إلى كل نقطة M من المستوي لاحقها z يرفق النقطة M' من المستوي لاحقها z' حيث أن : $z' = (-1 + \sqrt{3}i)z + \sqrt{3} + 2i$.

لتكن النقط A, B, C, D التي لواحقتها $z_A = -1, z_B = 1 + 2i, z_C = i, z_D = 3 - i$ على الترتيب .

(1) عين طبيعة التحويل S و عناصره المميزة .

(2) أثبت أن النقط A, B, C على استقامية .

(3) عين إحداثيات النقط A', B', C', D' صور النقط A, B, C, D بالتحويل S .

(4) تحقق أن النقط A', B', C' على استقامية .

(5) عين لاحقة النقطة P مركز ثقل المثلث ABD ثم عين لاحقة P' صورتها بالتحويل S .

(6) عين لاحقة النقطة P_1 مركز ثقل المثلث $A'B'D'$.

(7) ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $x - y - 1 = 0$ و ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته $-2x + 2y + 3 = 0$.

تأكد أن المستقيمين (D) و (Δ) متوازيان .

عين معادلتى (D') و (Δ') صورتي (D) و (Δ) بالتحويل S ثم تأكد أن المستقيمين (D') و (Δ') متوازيان .

(8) ليكن (D_1) المستقيم الذي معادلته $2x + 2y - 3 = 0$. تأكد أن المستقيمين (D) و (D_1) متعامدان .

عين معادلة (D'_1) صورة (D_1) بالتحويل S ثم تأكد أن المستقيمين (D') و (D'_1) متعامدان .

نسمي Q نقطة تقاطع (D) و (D_1) و Q' نقطة تقاطع (D') و (D'_1) ، بين أن Q' هي صورة Q بالتحويل S .

(9) أثبت أن صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ هي القطعة المستقيمة $[A'B']$ يمكن ملاحظة أن كل نقطة من القطعة

المستقيمة $[AB]$ تمثل مرجحا للنقطتين A و B مرفقتين بالمعاملين a و $1 - a$ و $a \in [0; 1]$.

(10) C الدائرة ذات المركز A ونصف القطر $2\sqrt{2}$.

أ - أكتب معادلة للدائرة C .

ب - ما هي طبيعة المجموعة C' صورة الدائرة C بالتحويل S ؟

ج - تحقق أن النقطتين B و B' تنتميان إلى C و C' على الترتيب .

د - أكتب معادلة للمجموعة C' .

هـ - قارن مساحتي C و C' .

(11) أ - أحسب الجذائين السلمييين $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ و $\overline{A'B'} \cdot \overline{A'D'}$.

ب - أحسب الأطوال $AB, AD, A'B', A'D'$ ، ثم أحسب $\cos \widehat{BAD}$ و $\cos \widehat{B'A'D'}$.

ج - ماذا تستنتج ؟

تمرين :

1. ليكن العددين المركبان z_1 و z_2 حيث :

$$z_1 = \sqrt{2}(1-i) \text{ و } z_2 = \frac{\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})i}{1 - z_1}$$

أ. أكتب العدد z_1 على الشكل المثلثي .

ب. برهن أن $z_2 = -i$

2. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر ،

M و M' نقطتان لاحتقائهما z و z' على الترتيب ؛ نضع

$z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$. نعتبر التحويل النقطي S

الذي يرفق بكل نقطة M ، النقطة M' حيث :

$$\begin{cases} x' = \sqrt{2}(x + y + 1) \\ y' = \sqrt{2}(-x + y + 1) - 1 \end{cases}$$

أ. أكتب z' بدلالة z .

ب. استنتج الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S .

ج. Δ المستقيم ذو المعادلة $x + y + 1 = 0$ ، أكتب معادلة

لصورة المستقيم Δ بالتحويل S

3. أ. أكتب العبارة المركبة للتحويل $S \circ S$.

ب. برهن أن $S \circ S$ هو تشابه مباشر .

ج. قارن بين العناصر المميزة للتحويلين S و $S \circ S$.

حل مختصر

$$1. \text{ أ. } z_1 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$\text{ومنه } z_1 = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\text{ب. } z_2 = \frac{\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})i}{1 - \sqrt{2}(1-i)} = \frac{\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})i}{(1 - \sqrt{2}) + i\sqrt{2}}$$

$$z_2 = \frac{-i[\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})i]}{-i[(1 - \sqrt{2}) + i\sqrt{2}]} = \frac{-i[\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})i]}{\sqrt{2} + i(-1 + \sqrt{2})} = -i$$

$$1. \text{ أ. } z' = x' + iy' = \sqrt{2}(x + y + 1) + i\sqrt{2}(-x + y + 1) - i$$

$$z' = \sqrt{2}(x + iy - ix + y + 1 + i) - i = \sqrt{2}(z - iz + 1 + i) - i$$

$$z' = \sqrt{2}(1-i)z + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$$

ب. نضع $\alpha = \sqrt{2}(1-i)$ و $\beta = \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$ ومن السؤال (1) ينتج

$$\frac{\beta}{1-\alpha} = z_2 = -i \text{ و } \alpha = z_1 = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

مباشر في المستوي نسبته 2 ، زويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $-i$.

ج. صورة المستقيم Δ بالتشابه المباشر S هي مستقيم Δ' بما أن $x + y + 1 = 0$ فإن $x' = 0$ وبالتالي Δ' هو حامل محور الترتيب .

$$3. \text{ أ. } z' = \sqrt{2}(1-i)[\sqrt{2}(1-i)z + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i] + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$$

$$z' = -4iz + 4 - i \text{ و } z' = -4iz + 4 - i\sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$$

$$\text{ب. } -4i = 4 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \text{ إذن } S \circ S \text{ هو تشابه مباشر نسبته 4 ،}$$

$$\text{زايته } -\frac{\pi}{2} \text{ ولاحقة مركزه العدد } z_0 \text{ حيث } z_0 = \frac{4-i}{1+4i} = \frac{-i(4i+1)}{1+4i} = -i$$

ج. - نسبة وزاوية التشابه $S \circ S$ هما ضعفا نسبة وزاوية S بينما لهما نفس المركز .

تعاليل

لكتابة z_1 على الشكل المثلثي يكفي

تعيين الطويلة وعمدة للعدد $1-i$.

يمكن كتابة z_2 على الشكل الجبري

باستعمال مرافق المقام لكن الحسابات

تكون طويلة .

$$-ix + y = -i \left(x + \frac{y}{-i} \right)$$

إذا كان $z' = \alpha z + \beta$ مع $\alpha \neq 0$

و $\alpha \neq 1$ فإن S تشابه مباشر في

المستوي نسبته $|\alpha|$ وزايته

$\arg(\alpha)$ ولاحقة مركزه العدد

$$\frac{\beta}{1-\alpha}$$

$$S(M) = M'$$

$$\text{و } S(M') = M'' \text{ نحصل على}$$

$$S[S(M)] = M''$$

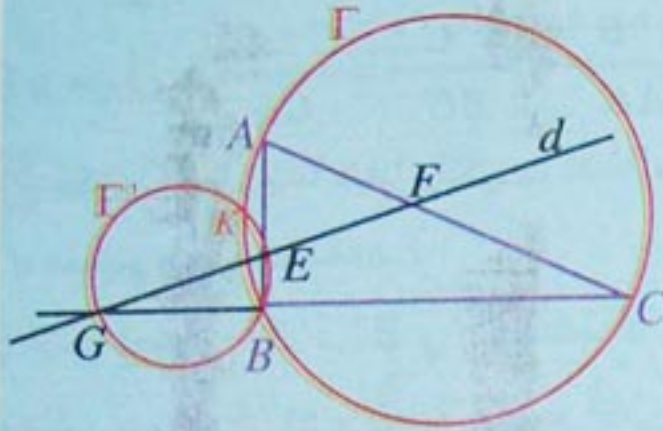
يمكن استعمال مركب تشابهين لهما

نفس المركز .

تنبيه

طرح المشكل بصيغتين مختلفتين ، استعمال طرائق هندسية ثم تطبيقات على الأعداد المركبة والوصول إلى نفس الهدف .
يجب توقع وتخمين عناصر غير واردة لبناء فرضيات والانطلاق في البرهنة.

تمرين



1. ليكن ABC مثلثا قائما في B ، ومباشر حيث $(\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{2}$.
لتكن E نقطة من القطعة $[AB]$. من النقطة E نرسم مستقيما d يقطع القطعة $[AC]$ في F ويقطع المستقيم (BC) في G (أنظر الشكل) .
نفرض أن النقط E ، F و G تختلف عن النقط A ، B و C .
 Γ و Γ' الدائرتان المحيطتان على الترتيب ، بالمثلثين ABC و BEG ،
تقاطعان في النقطتين K و B .

- برر وجود تشابه مباشر S في المستوي حيث $S(A) = C$ و $S(E) = G$. عيّن النسبة ، المركز والزاوية لـ S .
2. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O; \bar{u}; \bar{v})$ حيث تؤخذ وحدة الرسم $2cm$.
لنحقق النقط A ، B ، C ، E و G هي على الترتيب $z_A = 2 + 4i$ ، $z_B = -1 - 2i$ ، $z_C = 3 - 4i$ ،
 $z_E = 0$ و $z_G = -5$.

- أثبت أن المثلث ABC قائم في B .
- عيّن لاحقة النقطة K تقاطع الدائرتين اللتين قطراهما على الترتيب $[AC]$ و $[EG]$.
- مثل هذه النقط ضمن شكل .

3. ليكن S' التشابه المباشر في المستوي حيث $S'(A) = C$ و $S'(E) = G$.
- عيّن الكتابة المركبة للتشابه S' .
- عيّن العناصر المميزة للتشابه S' .

توجيهات

1. استعمال الزوايا المحيطية للبرهان على تشابه المثلثين CKG و AKE ثم نجد أن S تشابه مباشر مركزه K ونسبته هي نسبة قطري الدائرتين والزاوية $-\frac{\pi}{2}$.

2. تحقق من أن $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0$.

- ضع $K(x; y)$ وحل في $\mathbb{R}^2$ الجملة $\begin{cases} \overline{AK} \cdot \overline{CK} = 0 \\ \overline{EK} \cdot \overline{GK} = 0 \end{cases}$ حيث $(x; y)$ هي المجهول .

3. ضع $z' = \alpha z + \beta$ ولتعيّن α و β حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة $\begin{cases} S'(A) = C \\ S'(E) = G \end{cases}$.

- لإيجاد العناصر المميزة ، أكتب α على الشكل المثلثي و $\frac{\beta}{1-\alpha}$ على الشكل الجبري .

1 ليكن ABC مثلثا كيفيا ولتكن ω نقطة من المستوى.
(1) أنشئ الصور A' ، B' و C' للنقط A ، B و C بالتحاكي ذي المركز ω والنسبة 3. ثم أنشئ الصور A'' ، B'' و C'' للنقط A' ، B' و C' بالدوران ذي المركز ω والزاوية $\frac{\pi}{3}$.

(2) برهن أن: $\frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''A''}{CA}$.

2 ليكن ABC مثلثا كيفيا ولتكن ω نقطة من المستوى و d مستقيم يشمل النقطة ω .

(1) أنشئ الصور A' ، B' و C' للنقط A ، B و C بالتحاكي ذي المركز ω والنسبة -2. ثم أنشئ الصور A'' ، B'' و C'' للنقط A' ، B' و C' بالتناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم d .

(2) برهن أن: $\frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''A''}{CA}$.

3 ABC مثلث حيث $AB = 2cm$ ، $AC = 3cm$ و $BC = 4cm$.

C' نظيرة C بالنسبة إلى (AB) .

A' مرجح الجملة المنقلة $\{(C', 2); (A, -3)\}$ و B' مرجح الجملة المنقلة $\{(C', 2); (B, -\frac{3}{2})\}$.

4 - أرسم شكلا.

ب - برهن أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان.
ج - ما هي أطوال أضلاع المثلث $A'B'C'$ ؟

4 ABC مثلث حيث $(\overline{BA}; \overline{BC}) = \frac{\pi}{4}$.

A' و C' صورتا النقطتين A و C ، على الترتيب، بالدوران r ذي المركز B والزاوية $-\frac{\pi}{3}$.

A'' و C'' نظيرتا النقطة B بالنسبة A' و C' على الترتيب.

أ - أرسم شكلا.

ب - برهن أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

5 نرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات

اللاحقة z' حيث $z' = (1+i)z + 4$.

نعتبر النقطتين M و N المرفقتين بالصورتين M' و N' على الترتيب.

(1) بين أن الكسر $\frac{M'N'}{MN}$ ثابت.

(2) بين أنه توجد نقطة A وحيدة تنطبق على صورتها.

(3) أحسب $\frac{AM'}{AM}$ وكذلك الزاوية $(\overline{AM}; \overline{AM'})$.

(4) لتكن النقط B ، C و D وصورها B' ، C' و D' على الترتيب. برهن أن المثلثين BCD و $B'C'D'$ متشابهان.

6 T التحويل النقطي في المستوى، كتابته المركبة هي:

$z' = 2iz + 3$. لتكن A ، B و C النقط ذات اللواحق i ، 2 و $1-i$.

(1) عيّن لواحق النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C بالتحويل T .

(2) عيّن لاحقة النقطة D حيث $T(D) = A$.

(3) برهن أن: $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$.

(4) أحسب $(\overline{AB}; \overline{A'B'})$.

7 A نقطة من المستوى لاحقتها 1؛ h التحاكي الذي

مركزه A ونسبته -2؛ r الدوران الذي مركزه A

وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات $h \circ r$ ، $r \circ h$ و $h \circ r$.

هل $r \circ h = h \circ r$ ؟

8 A و B نقطتان من المستوى لاحقتاهما 2 و $3+i$

على الترتيب.

s هو التناظر المحوري بالنسبة للمستقيم (OA) .

t الانسحاب الذي شعاعه $\overline{AB}$.

أكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات $s \circ t$ ، $t \circ s$

و $t \circ s$.

هل $s \circ t = t \circ s$ ؟

9 في المستوي الموجّه $ABCD$ مربع مركزه O ؛

I, J, K, L هي منتصفات القطع $[AB], [BC], [CD], [AD]$ و M نظيرة J بالنسبة إلى النقطة C .

في كل حالة ، نتعرف على صور بعض النقط من الشكل بالتشابه في المستوي S . هل S تشابه مباشر ؟

أ - $S(I) = A$ و $S(J) = B$ ، $S(O) = O$.

ب - $S(A) = C$ و $S(I) = K$ ، $S(O) = O$.

ج - $S(I) = B$ و $S(J) = C$ ، $S(O) = O$.

د - $S(A) = M$ و $S(I) = C$ ، $S(O) = K$.

10 ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين وقائما

في B ، و K منتصف القطعة $[AC]$ ،

حيث $(\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{2}$.

عين نسبة وزاوية التشابهات

المباشرة المعرفة في الحالات المقترحة التالية :

(1) المركز A و B تحول إلى K .

(2) المركز C و K تحول إلى B .

(3) المركز A و B تحول إلى C .

11 ABC مثلث متقايس أضلاع حيث $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{3}$

A' و B' المنتصفان على الترتيب

للقطعتين $[AC]$ و $[BC]$ ،

و G مركز ثقل هذا المثلث.

ما هما نسبة وزاوية التشابهات

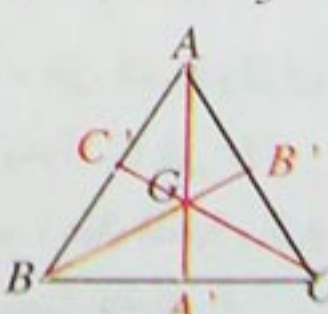
المباشرة المعرفة في كل من الحالات المقترحة التالية ؟

(1) المركز A و B تحول إلى A' .

(2) المركز A' و A تحول إلى C .

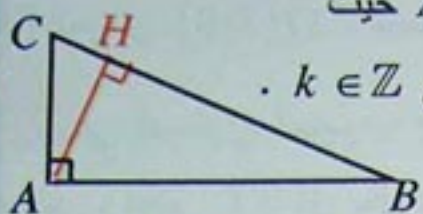
(3) المركز B و C تحول إلى G .

(4) المركز G و A تحول إلى B' .



12 ABC مثلث قائم في A حيث

$$(\overline{BC}; \overline{BA}) = \theta + 2\pi k \text{ مع } k \in \mathbb{Z} .$$



ما هما نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه H ويحول A إلى B ؟

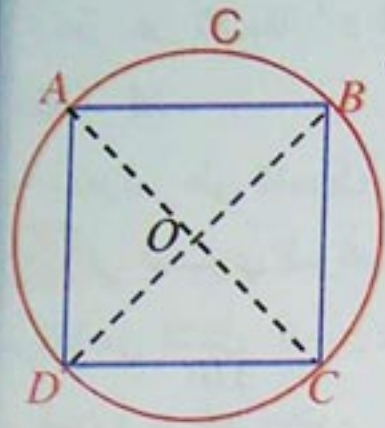
13 $ABCD$ مربع مركزه O ،

محيط بالدائرة C .

(1) أنشئ صورة للشكل بالتحاكي

ذي المركز B والنسبة 2 .

(2) أنشئ صورة للشكل بالتشابه



المباشر الذي مركزه A ، نسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

(3) برهن أن الشكلين المتحصل عليهما متقايسان .

14 نعتبر المربع $ABCD$ مع

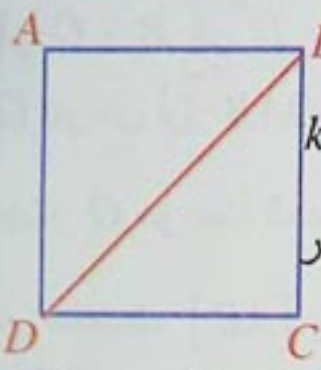
$$(\overline{AD}; \overline{AB}) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ و } k \in \mathbb{Z}$$

(1) عين النسبة والزاوية للتشابه المباشر

الذي يحول A إلى B و B إلى D .

(2) نفس السؤال يعاد بالنسبة للتشابه المباشر الذي يحول C

إلى D و A إلى B .



3. العبارة المركبة التشابه المباشر.

15 في المستوي المركب ، عين في كل حالة عبارة

مركبة للتشابه المباشر S ذي المركز Ω ، النسبة k

والزاوية θ .

أ - $\Omega(0)$ ، $k = 2$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$.

ب - $\Omega(-i)$ ، $k = \sqrt{2}$ ، $\theta = \frac{\pi}{4}$.

ج - $\Omega(2i)$ ، $k = \frac{1}{2}$ ، $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

د - $\Omega(1-2i)$ ، $k = 1$ ، $\theta = \pi$.

16 عين الدالة المركبة التي تعرف التشابه المباشر في كل

حالة من الحالات التالية :

(1) المركز هو المبدأ ، النسبة $2\sqrt{2}$ والزاوية $\frac{\pi}{4}$.

(2) المركز $\Omega(1;2)$ ، النسبة 3 والزاوية $\frac{2\pi}{3}$.

3) المركز $\Omega(3;0)$ ، النسبة $\frac{1}{3}$ والزاوية $-\frac{\pi}{6}$.

17) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

مباشر ، نعتبر T يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ النقطة

$M'(x'; y')$ حيث : $x' = x - y$ و $y' = x + y - 1$.

أ - عبّر عن اللاحقة z' للنقطة M' بدلالة اللاحقة z

للنقطة M .

ب - تعرّف على التحويل T .

18) في المستوي المركّب ، كل تشابه مباشر يقبل كتابة

مركّبة من الشكل $z' = az + b$ حيث a و b عددين

مركّبين و a غير معدوم .

1) A, B, C و D أربع نقط من المستوي حيث

$A \neq B$. برهن أنّه يوجد تشابه مباشر وحيد s يحول A

إلى C و B إلى D .

2) نفرض أنّ OAB مثلث مباشر ، قائم ومتساوي الساقين

حيث O هو مبدأ المعلم و $\left(\overline{OA}; \overline{OB}\right) = \frac{\pi}{2}$. النقطة C

هي منتصف $[AB]$ و D نظيرة C بالنسبة إلى (OB) .

أ - أعط العبارة المركّبة للتشابه s . عيّن زاوية ونسبة

التشابه s .

ب - بيّن أنّ O هو مركز التشابه s .

19) A, B, C و D أربع نقط من المستوي المركّب ،

ولاحقها على الترتيب $i, 1, \sqrt{3}-2$ و $1+i\sqrt{3}$.

1) أكتب العبارة المركّبة للتشابه المباشر s حيث :

$s(A) = C$ و $s(B) = D$.

2) عيّن العناصر المميّزة للتشابه s .

20) في المستوي المركّب ، $ABCD$ مربع ضلعه 1

ومركزه O حيث $\left(\overline{AB}; \overline{AD}\right) = \frac{\pi}{2}$.

I هو منتصف القطعة $[AO]$.

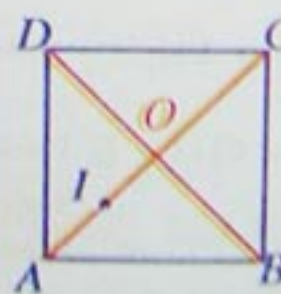
أ - برّر وجود تشابه مباشر وحيد S

حيث : $S(A) = O$ و $S(B) = I$.

ب - عيّن نسبة وزاوية التشابه S .

ج - أعط كتابة مركّبة للتشابه S مع اعتبار المعلم المتعامد

والمتجانس المباشر $(A; \overline{AB}; \overline{AD})$.



د - نسمي Ω مركز التشابه S . برهن أنّ المستقيمين

$(A\Omega)$ و (ΩD) متعامدان .

4 - خواص التشابه المباشر .

21) في المستوي الموجّه ، ABC مثلث قائم A ومتساوي

الساقين حيث $\left(\overline{AB}; \overline{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$.

أرسم صورة المثلث ABC بالتشابه المباشر المقترح في

كل حالة من الحالات التالية :

أ - S_1 ذو المركز A ، النسبة 2 والزاوية $\frac{\pi}{2}$.

ب - S_2 ذو المركز B ، النسبة 1 والزاوية $-\frac{\pi}{4}$.

ج - S_3 ذو المركز B ، النسبة $\frac{\sqrt{2}}{2}$ والزاوية $\frac{\pi}{4}$.

22) في المستوي الموجّه ، ABC مثلث متقايس أضلاع

حيث $\left(\overline{AB}; \overline{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$ و G مركز ثقله .

أرسم صورة المثلث ABC بالتشابه المباشر المقترح في

كل حالة من الحالات التالية :

أ - S_1 ذو المركز A ، النسبة 2 والزاوية $-\frac{\pi}{3}$.

ب - S_2 ذو المركز G ، النسبة $\frac{1}{2}$ والزاوية $-\frac{2\pi}{3}$.

ج - S_3 ذو المركز G ، النسبة $\frac{1}{2}$ والزاوية π .

23) في المستوي الموجّه ، $ABCD$ مربع مركزه I

حيث $\left(\overline{AB}; \overline{AD}\right) = \frac{\pi}{2}$.

أ - عيّن النسبة والزاوية للتشابه المباشر الذي مركزه A

ويحول C إلى D .

ب - عيّن النسبة والزاوية للتشابه المباشر الذي مركزه B

ويحول A إلى I .

24) في المستوي المركّب ، تعطى النقط $A(1;0)$ ؛

$A'(-3;-5)$ ، $B(-4;5)$ و $B'(-3;0)$

أ - برّر أنّه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث $S(A) = A'$

و $S(B) = B'$.

ب - أعط العبارة المركّبة للتشابه S .

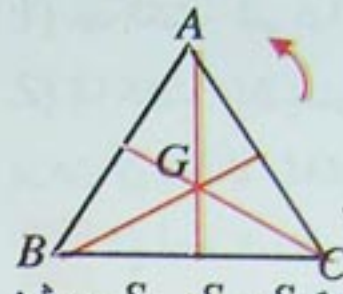
ج- ما هي نسبة التشابه S ؟ وما هي زاويته ؟

د- عين إحداثيتي النقطة C' صورة النقطة $C(-1;5)$.

ج- عين إحداثيتي النقطة D التي صورتها $D'(-1;0)$.

25 في المستوي الموجّه،

ABC مثلث متقايس أضلاع حيث



$(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{3}$ و G مركز ثقله.

عين النسبة والزاوية للتشابهات المباشرة S_1, S_2, S_3 حيث:

أ- $S_1(A) = C$ و $S_1(B) = B$

ب- $S_2(C) = G$ و $S_2(B) = B$

ج- $S_3(B) = C$ و $S_3(G) = G$

5. الأشكال الهندسية بالتشابه المباشر.

26 $(O; \vec{u}; \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي،

OCD مثلث متقايس أضلاع مباشر. B منتصف $[OC]$.

نعتبر النقطة A حيث يكون المثلث OAB متقايس أضلاع

مباشر. S التشابه المباشر ذو المركز O ويحول D إلى B

أذكر إن كان العبارات المقترحة التالية صحيحة أم خاطئة
مبررا ذلك.

أ- نسبة S هي $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

ب- $S(A) = C$.

ج- صورة المثلث OCD هي المثلث OAB بالتشابه S .

د- S^{-1} هو التشابه المباشر الذي مركزه O ، نسبته 2

وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

27 في المستوي المركّب، S التشابه المباشر عبارته

المركبة $z' = iz + 1 - i$.

d مستقيم معادلته $y = x + 5$.

أكتب معادلة للمستقيم d' صورة d بالتشابه S .

28 $(O; \vec{u}; \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي

المركّب. S التشابه المباشر عبارته المركبة

$z' = (i + 1)z + 2 - i$.

عين الصورة بالتشابه S لكل من :

أ- الدائرة C ذات المركز O ونصف القطر 4.

ب- الدائرة C_2 ذات المركز $\Omega(2;2)$ ونصف القطر 3.

ج- المستقيم (AB) حيث A و B نقطتا التقاطع الدائرتين

C_1 و C_2 .

29 C هي نقطة من الدائرة ذات القطر $[AB]$ ، وتختلف

عن A و B .

H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) .

S التشابه المباشر الذي مركزه C ويحول H إلى B .

عين الصورة D للمستقيم (AB) بالتشابه S .

ما القول عن المستقيمين D و (AC) ؟

30 $EFGH$ معين معين مركزه O .

أنشئ صورة المعين $EFGH$ بالتشابه المباشر S ذي

المركز O ويحول E إلى F .

31 في المستوي الموجّه، ABC مثلث متقايس أضلاع

حيث $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{3}$. نسمي S التشابه المباشر ذي

المركز C النسبة $\sqrt{3}$ والزاوية $\frac{\pi}{6}$.

(1) برهن أن صورة A بـ S هي A' نظيرة C بالنسبة

للمستقيم (AB) .

(2) برهن أن صورة B بـ S هي نظيرة A بالنسبة لـ B .

(3) أ- ما هي صورة مركز ثقل المثلث ABC بـ S .

ب- استنتج صورة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC بـ S .

32 في المستوي الموجّه، $ABCD$ مربع مركزه O ؛

حيث $(\overline{AB}; \overline{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

S التشابه المباشر ذو المركز D حيث $S(O) = C$.

أ- عين الزاوية والنسبة لهذا التشابه.

ب- عين صورة A بالتشابه S .

ج- أنشئ صورة C بالتشابه S ، باستعمال خواص

التشابهات.

33 نعتبر النقطتين A و B لاحتقيهما على الترتيب 1

و i . C نقطة حيث $OACB$ مربعاً. I مركز المربع.

K ، L و J منتصفات القطع $[IC]$ ، $[AC]$ و $[AI]$

على الترتيب.

(1) ما هي طبيعة الرباعي $IKLJ$ ؟

(2) عين المركز ، النسبة والزاوية للتشابه المباشر f حيث

$$f(O) = I \text{ و } f(B) = K$$

$$\text{برهن أن } f(A) = J \text{ و } f(C) = L$$

تمارين للتعمق

1 - العبارة المركبة للتشابه المباشر.

34 في المستوي المركب ، نعتبر التحويل النقطي T

يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات

$$\text{اللاحقة } z' = az + a \text{ مع } a \text{ عدد مركب.}$$

(1) عين a حتى يكون التحويل T انسحابا يطلب شعاعه.

(2) عين a حتى يكون التحويل T دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$.

أوجد مركزه .

(3) عين a حتى يكون التحويل T تحاك نسبته -3 .

أوجد مركزه .

(4) عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل T في حالة

$$a = -1 - i$$

35 في المستوي المركب ، نعتبر المربع $ABCD$ مركزه

$$P \text{ حيث } AB = 8 \text{ cm و } (\overline{AB}; \overline{AD}) = \frac{\pi}{2}$$

نعين Q منتصف $[CD]$

$$\text{و } s(A) = P$$

$$\text{و } s(C) = Q$$

نعتبر المعلم المتعامد والمتجانس $(A; \vec{u}; \vec{v})$ حيث

$$\overline{AB} = 8\vec{u} \text{ و } \overline{AD} = 8\vec{v}$$

(1) عين لواحق النقط A, C, P, Q .

(2) بالتشابه s ، النقطة M ذات اللاحقة z تحول إلى

النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = \alpha z + \beta$ مع α

و β عددن مركبين. أحسب α و β .

(3) انطلاقا من الكتابة المركبة ، جد قيمتي النسبة λ

والزاوية θ للتشابه s .

أحسب اللاحقة ω للنقطة Ω مركز التشابه s .

36 نعتبر الأعداد المركبة التالية: $z_1 = 1$ و $z_2 = \sqrt{3} + i$

$$z_3 = i \text{ و } z_4 = 1 - i\sqrt{3}$$

في المستوي المركب نعتبر النقط A, B, C, D

لواحقها على الترتيب z_1, z_2, z_3, z_4 .

ليكن s التشابه المباشر الذي A إلى B و C إلى D .

(1) جد الكتابة المركبة للتشابه s ، عين عناصره .

(2) إذا كانت M' صورة M بالتشابه s و Ω مركزه ،

برهن أن المثلث $MM'\Omega$ قائم .

37 أعط العناصر المميزة للتشابه المباشر f المعروف

$$\text{بالكتابة المركبة التالية : } z' = (1-i)z + 2 - i$$

(2) في كل من الحالات التالية ، عين التشابه المباشر s

حيث $s \circ f$ يكون :

— التحاكي الذي مركزه O ونسبته $\frac{1}{2}$.

— الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(1; -1)$.

— التشابه المباشر الذي مركزه $B\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ ، زاويته $\frac{5\pi}{4}$

ونسبته 2 .

38 ليكن S التشابه المعروف بالدالة المركبة التالية :

$$z \mapsto (1+i)z + 2$$

(1) حدد العناصر المميزة للتشابه S وليكن I مركزه.

(2) إذا كان $S(M) = M'$ فما هي طبيعة المثلث IMM' ؟

(3) ما هي المجموعة E للنقط M من المستوي التي يكون

$$\text{من أجلها } OM = OM' ?$$

(4) ما هي المجموعة F للنقط M من المستوي التي يكون

$$\text{من أجلها } \overline{OM} \cdot \overline{OM}' = 0 ?$$

39 لتكن في المستوي المركب النقطتين M و M'

لاحقتاهما على الترتيب $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ مع

x, y, x', y' أعداد حقيقية .

نفرض أن الثنائية $(x'; y')$ مرتبطة بالثنائية $(x; y)$

$$\text{بالعلاقين التاليين : } x' = -3x + 3y + 10$$

$$\text{و } y' = -3x - 3y - 5$$

عبر عن z' بدلال z وتعرف على التحويل المرفق .

40 في المستوي المركب تعطى النقطة A ذات اللاحقة

$$2 + i \text{ ونعتبر التشابه المباشر } s \text{ ذي المركز } A \text{ ، النسبة } 2$$

والزاوية $-\frac{\pi}{4}$. هذا التشابه يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$

عَيْن التشابه المباشر S الذي يحول النقطة A إلى النقطة C ، و النقطة D إلى النقطة B (تعطى العناصر المميزة للتشابه S).

(2) لتكن النقطة K_0 التي لاحتقها $3i$. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $K_{n+1} = S(K_n)$ و $u_n = \|\omega K_n\|$ حيث ω هي مركز التشابه S .

— احسب $\|\omega K_n\|$ بدلالة n .

— ما هي طبيعة المتتالية (u_n) ؟

— أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2 - خواص التشابه المباشر.

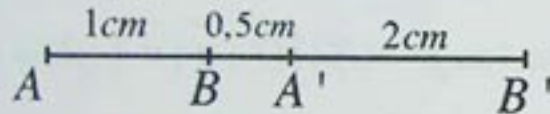
45 A, B, A', B' حيث $A' \neq B', A \neq B$ و $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$.

S هو التشابه المباشر حيث $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$

في كل حالة من الحالتين التاليتين

أ - $(AB) \parallel (A'B')$

ب - A, B, A', B' في استقامة.



46 في المستوي الموجه، ABC مثلث قائم A ومتساوي الساقين حيث $\left(\overline{AB}; \overline{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$.

نعين I منتصف القطعة $[BC]$ ، M نقطة كيفية من

$[BC]$ متمايضة عن B و C .

P و Q نقطتان من $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب حيث

يكون $APMQ$ مستطيلاً.

أ - برّر وجود تشابه مباشر وحيد S حيث $S(A) = B$

و $S(Q) = P$.

ب - حدّد الطبيعة والعناصر المميزة لهذا التشابه.

ج - استنتج أن المثلثين IQA و IPB متقايسان مباشرة.

47 في المستوي الموجه، ABC مثلث متقايس أضلاع

حيث $\left(\overline{AB}; \overline{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$ ، A' منتصف $[BC]$ ، B'

منتصف $[AC]$ و C' منتصف $[AB]$.

(1) عبّر عن z' بدلالة z .

(2) عبّر عن الإحداثيتين x' و y' للنقطة M' بدلالة

الإحداثيتين x و y للنقطة M .

(3) أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (D') المحول بالتشابه S

للمستقيم (D) ذي المعادلة $x = 3$.

41 في مستو موجه، حدّد التشابه المباشر الذي يرفق

بالنقطة $A(1;1)$ النقطة $B(-2;0)$ ويرفق بالنقطة

$C(2;-1)$ النقطة $D(-4;-1)$.

42 بكالوريا

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية :

$$z^2 - 2(2-i)z + 6 = 0$$

يرمز بـ z_1 للحل الذي له أصغر طولية و z_2 للحل الآخر.

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر.

نأسي A, B, M_1 و M_2 النقط التي لواحقها $2i$ ،

z_1 و z_2 على الترتيب.

α و β عدنان مركبان و T تحويل نقطي يرفق بكل

نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z'

بـ $z' = \alpha z + \beta$.

أ - عيّن α و β علماً أن صورة A بالتحويل T هي B

وصورة M_1 بالتحويل T هي M_2 .

ب - ما هي طبيعة التحويل T ؟ أعط عناصره المميزة.

43 في المستوي المركب نعتبر النقط $A(1;0)$ ،

$B(2;0)$ و $C(1;1)$.

أ - عيّن نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه B

ويحول A إلى C .

ب - T تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M

ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' = (1-i)z - 2i$$

ما هي طبيعة التحويل T ؟

ما هي طبيعة المثلث BMM' ؟

44 (1) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

مباشر . A, B, C و D نقط من المستوي لواحقها

على الترتيب : $1+2i$ ، $5+2i$ ، $1+4i$ و $2-i$.

50 ليكن P المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$ تؤخذ الوحدة $1cm$.

تعطى النقطتان A و B لاحقتيهما على الترتيب 12 و $9i$.
التحويل f في المستوي P ، يرفق بكل نقطة M ذات
اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث

$$z' = -\frac{3}{4}iz + 9i$$

(1) أ- برهن أن التحويل f يقبل نقطة صامدة Ω إحداثيتها $\left(\frac{108}{25}, \frac{144}{25}\right)$.

ب- برهن أن التحويل f هو تشابه مباشر زاويته $-\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{3}{4}$. ما هو مركزه؟

(2) أ- ما هما صورتا النقطتين A و O بالتحويل f ؟
ب- برهن أن Ω هي نقطة مشتركة للدائرتين C_1 و C_2 ذات
القطرين على الترتيب $[OA]$ و $[OB]$.

ج- بين أن Ω هي المسقط العمودي للنقطة O على (AB) .

$$\text{وبين أن } \Omega A \times \Omega B = \Omega O^2$$

د- أنجز رسماً يتضمن النقط A ، B و Ω وكذلك الدائرتين C_1 و C_2 .

51 في المستوي الموجّه، نعتبر المستطيل $ABCD$ حيث $AB = \sqrt{2}$ ، $AD = 1$ و $(\overline{AB}; \overline{AD})$ زاوية قائمة مباشرة؛ I منتصف القطعة $[AB]$.

ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$ حيث $\bar{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB}$ و $\bar{v} = \overline{AD}$.

ليكن S التشابه المباشر يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = az + b$ مع a و b عدنان مركبان و a غير معدوم.

(1) عيّن العددين a و b حيث $S(D) = C$ و $S(C) = B$.

(2) ليكن T التشابه المباشر يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

نقترح إثبات أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان مباشرة.

(1) ولهذا نبحث عن وجود تشابه مباشر S حيث:

$$S(A) = B', S(B) = C', S(C) = A'$$

أ- برهن أن للمثلثين ABC و $A'B'C'$ نفس مركز ثقل واستنتج مركز التشابه إن وجد.

ب- عيّن النسبة لهذا التشابه.

ج- عيّن الزاوية للتشابه S .

د- برهن أن التشابه المعروف سابقاً محقق.

(2) ما هو التشابه المباشر S' حيث: $S'(A) = A'$ ،

$$S'(B) = B' \text{ و } S'(C) = C'?$$

48 θ_1 ، θ_2 ، k_1 و k_2 أعداد حقيقية. برهن أن:

أ- مركب دورانين r_1 و r_2 ، زاويتاهما θ_1 ، θ_2 هو انسحاب أو دوران زاويته $\theta_1 + \theta_2$.

ب- مركب تحاكين h_1 و h_2 ، نسبتهما k_1 و k_2 هو انسحاب أو تحاك نسبته $k_1 k_2$.

49 في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O; \bar{u}; \bar{v})$ (تؤخذ الوحدة $5cm$)، تعطى

النقط A ، B و C لواحقها i ، $\sqrt{2}$ و $\sqrt{2} + i$ على الترتيب.

نعين I ، J و K منتصفات القطع $[AC]$ ، $[OB]$ و $[BC]$ على الترتيب.

1. أ- برّر وجود تشابه مباشر وحيد s يحول A إلى I و O إلى B .

ب- عيّن النسبة والزاوية للتشابه s .

ج- أعط الكتابة المركبة للتشابه s .

د- عيّن صور النقط B ، C و I بالتشابه s .

2. نعتبر التحويل $s^2 = s \circ s$.

أ- برهن أن s^2 هو تحاك يطلب تحديد مركزه ونسبته.

ب- ما هي صور النقط O ، B و A بالتحويل s^2 ؟

ج- استنتج أن المستقيمات (OC) ، (BJ) و (AK) متقاطعة في نقطة واحدة.

$$z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}iz + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$$

عين النسبة والزاوية للتشابه T .

(3) بين أن التشابه T يحول B إلى I .

(4) بين أن المستقيمين (BD) و (CI) متعامدان.

(5) بين أن Ω مركز التشابه T هو نقطة تقاطع المستقيمين

(BD) و (CI) .

52 في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد

والمجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$ ، نعتبر التحويل f يرفق بكل

نقطة M ذات اللاحقة z بالنقطة M' ذات اللاحقة z'

$$\text{حيث: } z' = (1+i\sqrt{3})z - i\sqrt{3}.$$

(1) ما هي طبيعة التحويل f ؟ حدد عناصره المميزة.

(2) ما هي الصورة بالتحويل f للمستقيم D ذي المعادلة

$$y = -\sqrt{3}x?$$

(3) ما هي الصورة بالتحويل f للدائرة ذات المركز O

ونصف القطر 2؟

53 ليكن S التشابه المباشر ذي المركز النقطة A ،

$$\text{مبته } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ وزاويته } \frac{3\pi}{4}.$$

ليكن M' صورة M و M'' صورة M' بالتشابه S .

ليكن H المسقط العمودي للنقطة M على (AM') .

$$(1) \text{ برهن أن } \overline{AM'} + \overline{AH} = \vec{0}.$$

(2) برهن أن M'' هي المسقط العمودي للنقطة H على

$$(AM').$$

$$(3) \text{ برهن أن } \overline{AM''} + \overline{AM'} + \frac{1}{2}\overline{AM} = \vec{0}.$$

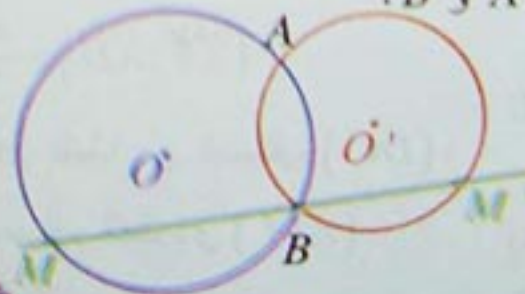
(4) إذا كانت A مبدأ المعلم، أعط الكتابة المركبة للتشابه

S وأوجد المساواة المطروحة في السؤال الأول.

54 في المستوي الموجّه، نعتبر دائرتين C و C' ،

مركزيهما O و O' ونصفي قطريهما r و r' على الترتيب

متقاطعتين في النقطتين A و B .



(1) برهن أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S مركزه A ويحول C إلى C' ، يطلب تحديد زاويته ونسبته.

(2) ليكن M نقطة من C ، أنشئ صورتها M' بالتشابه S .

قارن الزوايتين الموجهتين $(\overline{OA}; \overline{OM})$ و $(\overline{O'A}; \overline{O'M'})$.

أثبت أن النقط M ، B و M' في استقامة.

55 في المستوي الموجّه، نعتبر المثلث القائم ABC

$$\text{حيث } (\overline{CA}; \overline{CB}) = \frac{\pi}{2}.$$

الارتفاع من C يقطع (AB) في H ويقطع الموازي لـ

(BC) المرسوم من A في D .

$$\text{نضع } BC = a \text{ و } CA = b.$$

(1) ليكن التشابه المباشر S الذي يحول C إلى A و B إلى C .

أ- عين نسبته بدلالة a و b وأحسب زاويته.

ب- استعمل هذه الزاوية، برهن أن مركز التشابه S هو H .

ج- ما هي صورة A بالتشابه S ؟

(2) استعمل S برهن المساواة $HC^2 = HA \times HB$.

(3) ليكن I منتصف $[BC]$ ، J منتصف $[CA]$ و K

منتصف $[AD]$.

برهن أن المثلث IJK قائم في J و H قاعدة الارتفاع

المرسوم من J .

56 في المستوي الموجّه، نعتبر المثلث القائم والمتساوي

الساقين ABC حيث $AB = AC = L$ مع L ثابت

$$\text{حقيقي موجب تماما، و } (\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}.$$

نعين D نظيرة A بالنسبة لـ B ، O منتصف $[CD]$

و T الدائرة ذات القطر $[CD]$. مثل في شكل النقط A ،

B ، C ، D ، O والدائرة T .

نسمي S التشابه المباشر الذي يحول D إلى B و B إلى C

نريد تعيين العناصر المميزة لـ S ونسمي I مركزه.

$$\text{نضع } \bar{u} = \frac{1}{L}\overline{AB} \text{ و } \bar{v} = \frac{1}{L}\overline{AC} \text{ ونعتبر المعلم المتعامد}$$

والمجانس $(A; \bar{u}; \bar{v})$ للمستوي المركب، نضع z_0

لاحقة النقطة I .

(1) عين لواحق النقط B ، C و D .

في A يقطع (BC) في N ؛ و I منتصف القطعة $[MN]$.

- برهن أن المثلث القائم AMN هو متساوي الساقين .
- برهن أن النقطة I هي صورة M بتشابه مباشر .
- ما هي مجموعة النقط I لمّا M تمشح المستقيم (DC) ؟

63 نضع $u = (1-i)z + 2i$.

عَيِّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث تكون طويلة u هي 2 .

(1) باستعمال التشابه المباشر ذي المركز $A(2;0)$ ،

الزاوية $-\frac{\pi}{4}$ والنسبة $\sqrt{2}$.

(2) باستعمال طريقة أخرى .

64 بكالوريا

في المستوي الموجّه ، نعتبر مربعاً مباشراً $ABCD$ ذي المركز O . لتكن P نقطة من القطعة $[BC]$ وتختلف عن B . نعيّن تقاطع المستقيمين (AP) و (CD) .

المستقيم Δ العمودي على (AP) في A ، يقطع (BC) في R و (CD) في S .
1. أنجز رسماً .

2. ليكن r الدوران ذي المركز A والزاوية $\frac{\pi}{2}$.

أ - حدّد صورة المستقيم (BC) بالدوران r مبرراً إجابتك .

ب - عَيِّن صورة لكل من النقطتين R و P بالدوران r .

ج - ما هي طبيعة كل من المثلثين ARQ و APS ؟

3. نسمي N منتصف القطعة $[PS]$ و M منتصف

القطعة $[QR]$. ليكن s التشابه المباشر ذي المركز A ،

النسبة $\frac{\sqrt{2}}{2}$ والزاوية $\frac{\pi}{4}$.

أ - عَيِّن صورة لكل من النقطتين R و P بالتشابه s .

ب - ما هو المحل الهندسي للنقطة N لمّا P تمشح القطعة $[BC]$ باستثناء B ؟

برهن أن النقط M ، B ، N و D في استقامية .

65 دائرة مركزها O .

P نقطة خارج الدائرة C و Q نقطة داخلها .

نريد إنشاء مثلثاً OAB متساوي الساقين وقائم في O في

الاتجاه المباشر ، مع A و B نقطتين من الدائرة C والمستقيمين (AP) و (BQ) متوازيين .

(1) نفترض شكلاً للمثلث OAB .

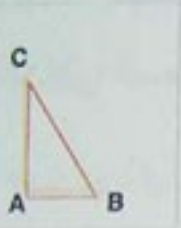
أ - ما هو التشابه المباشر الذي مركزه O ويحول A إلى B ؟

ب - نضع $P' = S(P)$. برهن أن $(AP) \parallel (BQ)$.
إذا وفقط إذا ، كان $(BP') \perp (BQ)$.

(2) أكتب مخططاً لإنشاء مثلث OAB ويكون حلاً للمسألة .

66 بكالوريا

الشكل المعطى سوف يتم من خلال الجواب عن الأسئلة .



في المستوي الموجّه ، يعطى المثلث ABC

حيث $AB = 2$ ، $AC = 1 + \sqrt{5}$ و $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

1. أ - البرهان للدرس : برهن أنه يوجد تشابه مباشر

وحيد S يحول B إلى A و A إلى C .

ب - عَيِّن النسبة والزاوية للتشابه S .

2. نسمي Ω مركز S . بيّن أن Ω تنتمي إلى الدائرة ذات

القطر $[AB]$ والمستقيم (BC) .

- أنشئ النقطة Ω .

3. نعيّن D صورة النقطة C بالتشابه S .

أ - برهن استقامية النقط A ، Ω و D ، وكذلك توازي

المستقيمين (CD) و (AB) . أنشئ النقطة D .

ب - برهن أن $CD = 3 + \sqrt{5}$.

4. لتكن E المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (CD) .

أ - اشرح إنشاء الصورة F للنقطة E بالتشابه S ومثل

النقطة F في الشكل .

ب - ما هي طبيعة الرباعي $BFDE$ ؟

67 ليكن d مستقيماً و O نقطة لا تنتمي إليه .

نعتبر المثلث OAB قائم في A ومتساوي الساقين حيث A

نقطة متغيرة على المستقيم d و $(\overline{AB}; \overline{AO}) = \frac{\pi}{2}$.

عين المحل الهندسي للنقطة B عندما A تمشح المستقيم d .

68 في المستوى الموجّه المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر ، h التحاكي ذي مركز A والنسبة 2 ، الدوران ذي مركز A والزاوية $\frac{3\pi}{4}$ ، s التناظر

المحوري بالنسبة لمحور الفواصل و S تشابه ليس مباشر .
في كل حالة عبر عن S كمركّب لتشابهات مستوية .

أ - $s \circ r = S \circ s$ ؛ ب - $h \circ r = S \circ s$ ؛ ج -

د - $s = S \circ h \circ r$ ؛ هـ - $h = r \circ S \circ s$

69 في المستوى الموجّه ، d مستقيم و A نقطة لا تنتمي إلى d .

التناظر المحوري ذي المحور d .

r الدوران ذي المركز A والزاوية $\frac{\pi}{3}$.

أ - أرسم نقطة M تختلف عن A ولا تنتمي إلى d . أنشئ

تصويرة M' للنقطة M بالتشابه (ليس مباشرا) $S = r \circ s$

ب - أنشئ الصورة M'' للنقطة M بالتشابه (ليس مباشرا)

$S' = s \circ r$.

ج - هل $S = S'$ ؟

70 في المستوى ، d مستقيم ؛ A و B نقطتين متميزتين

لا تنتميان إلى المستقيم d حيث (AB) يوازي d .

أ - انصحاب شعاعه $\overline{AB}$ و s التناظر المحوري ذي

المحور d .

S و S' تشابهان (غير مباشرين) معرفان بـ $S = t \circ s$

ب - $S' = s \circ t$.

برهن أن $S = S'$.

71 في المستوى ، d مستقيم ، و A نقطة من d .

s التناظر المحوري ذي المحور d . h التحاكي ذي

المركز A والنسبة 4 . S و S' تشابهان (غير مباشرين)

معرفان بـ $S = s \circ h$ و $S' = h \circ s$.

برهن أن $S = S'$.

72 في المستوى المركب ، A النقطة ذات اللاحقة $2+i$.

h التحاكي ذي المركز A والنسبة $\frac{1}{2}$.

s التشابه (غير المباشر) ذي الكتابة المركبة :

$$z' = i\bar{z} + 1 - i$$

نعتبر T التحويل النقطي حيث $T = s \circ h$.

أ - عيّن مجموعة النقط الصامدة بالتحويل s . استنتج طبيعة s .

ب - ما هي طبيعة التحويل T ؟

ج - باستعمال البرهان بالخلف أثبت أن التحويل T يقبل

نقطة صامدة وحيدة وهي A .

د - عيّن العبارة المركبة للتحويل T وجد النتيجة السابقة .

73 في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس مباشر $(O; \bar{u}; \bar{v})$ ، النقطة ذات اللاحقة 1 ،

d المستقيم ذي المعادلة $y = x$.

r الدوران ذي مركز O والزاوية $\frac{\pi}{2}$ ، s التناظر

المحوري ذي المحور d .

أ - تحقق أن O و A نقطتان صامدتان بالتشابه $s \circ r$.

ب - استنتج الطبيعة للتحويل $s \circ r$ وبرهن أن $r = s \circ s'$

مع s' هو تناظر محوري يطلب تحديد محوره .

74 في المستوى المركب ، العبرة المركبة لتشابه S هي:

$$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \bar{z} + 2i$$

برهن أن $S = r \circ s$ حيث r هو دوران و s تناظر

محوري يطلب تحديدهما .

75 تعطى العبارة المركبة للتشابه (غير المباشر) S .

في كل حالة ، أكتب S على الشكل $S = \sigma \circ s$ مع σ

هو تشابه مباشر و s تناظر محوري يطلب تحديدهما .

أ - $z' = \bar{z} - 3i$ ؛ ب - $z' = 3i\bar{z} - 1$ ؛ ج -

$$z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \bar{z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{د -} \quad z' = \frac{5}{2}\bar{z} + 1$$

76 في المستوى المركب ، S التشابه ذي العبرة

$$\text{المركبة : } z' = \left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \bar{z} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

عيّن صورتَي النقطتين A و B ذات اللاحقتين i و $1-i$

على الترتيب ، بالتشابه S .

استنتج طبيعة S .

77 في المستوي المركب ، S التشابه (غير المباشر)

الذي يحول $A(-3i)$ إلى $A'(3)$ و $B(3-2i)$ إلى $B'(-3-2i)$.

أعط الكتابة المركبة للتشابه S . ما هي نسبة S ؟

78 في المستوي المركب ، S التشابه ذي العبرة

المركبة : $z' = -5i\bar{z} + 1 + i$.

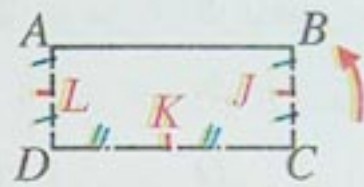
أ- عيّن معادلة لصورة المستقيم الذي يشمل النقطتين

A و B ذات اللاحقتين $1+2i$ و 2 على الترتيب ،

بالتشابه S .

ب- عيّن صورة الدائرة C ذي المركز $I(3+i)$

ونصف القطر $\sqrt{5}$ ، بالتشابه S .



79 في المستوي الموجّه ،

$ABCD$ مستطيل حيث :

$AB = 2$ ، $AD = 1$ و $(\overline{DC}; \overline{DA}) = \frac{\pi}{2}$.

L ، K و J منتصفات القطع المستقيمة $[AD]$ ، $[DC]$

و $[BC]$ على الترتيب .

أ- استعمل المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد

و متجانس المباشر $(D; \overline{DK}; \overline{DA})$ ، برهن أنه يوجد

تشابه وحيد غير مباشر S حيث $S(A) = D$

و $S(C) = B$.

ب- تحقق من أن النقطتين L و J صامدتان بالتشابه S .

ج- ما هي طبيعة التشابه S .

مسائل

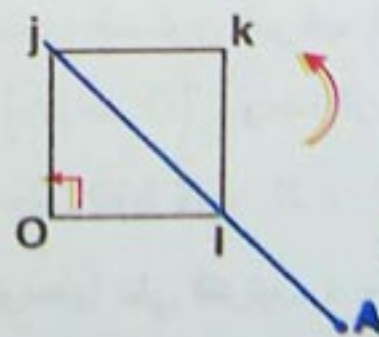
80 في المستوي الموجّه ،

نعتبر المربع $OIKJ$ ضلعه 1 ،

حيث $(\overline{OI}; \overline{OJ}) = \frac{\pi}{2}$.

A نقطة كيفية من المستقيم (IJ)

وتختلف عن I .



نرمز بـ S إلى التشابه المباشر ذي المركز O ويحول I

إلى A . الصور للنقط J ، K و A بالتحويل S هي على

الترتيب J' ، K' و A' .

(1) أ- ما هي طبيعة الرباعي $OAK'J'$ ؟

ب- بين أن النقط J' ، A و A' في استقامة .

ج- قارن بين الزاويتين $(\overline{OI}; \overline{OA})$ و $(\overline{OI}; \overline{OA'})$.

د- أعد الشكل المعطى أعلاه بأخذ $OI = 5cm$ وأنشئ

النقط J' ، K' و A' .

هـ- بين أن $A'O = A'K'$.

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس المباشر $(O; \overline{OI}; \overline{OJ})$.

في كل مما يأتي نضع a لاحقة النقطة A و α عمدة

للعدد المركب a .

أ- بين أن $a-1$ يقبل كعمدة $-\frac{\pi}{4}$ أو $\frac{3\pi}{4}$.

ب- استعمل التناظر بالنسبة إلى المستقيم (IJ) ، بين أن :

$$(\overline{OI}; \overline{OA}) = (\overline{KA}; \overline{KI})$$

استنتج أن $-\alpha - \frac{\pi}{2}$ هي عمدة للعدد المركب $a - (1+i)$.

(3) M و M' نقطتان من المستوي لاحتقاهما z و z'

على الترتيب .

أ- بين أنه إذا كانت M' صورة M بالتشابه S ، فإن

$$z' = az$$

ب- عيّن بدلالة a ، اللاحقتين k' و a' للنقطتين K'

و A' على الترتيب .

ج- نرمز بـ z_1 و z_2 إلى لاحقتي الشعاعين KK' و $K'A'$

على الترتيب .

باستعمال السؤال (2) ، بين أن z_1 هو حقيقي و z_2 هو

تخيلي صرف .

(4) بين أن k' هي نقطة من (JK) وتحقق :

$$(\overline{K'A'}) \perp (JK)$$

81 المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$(O; \bar{u}; \bar{v})$ (تؤخذ وحدة الرسم $1cm$).

نعتبر النقط A_0 ، A_1 و A_2 ذات اللواحق على الترتيب

$z_0 = 5-4i$ ، $z_1 = -1-4i$ و $z_2 = -4-i$.

(1) أ- برّر أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث :

$$S(A_1) = A_0 \text{ و } S(A_0) = A_1$$

ب - بين أن الكتابة المركبة للتشابه S هي :

$$z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$$

ج - استنتج النسبة ، الزاوية واللاحقة ω للمركز Ω ،
للتشابه S .

د - نعتبر M و M' نقطتين من المستوي لاحقتهما z

و z' على الترتيب حيث $z \neq \omega$ ، و $S(M) = M'$.

تحقق من العلاقة $\omega - z' = i(z - z')$. استنتج طبيعة

المثلث $\Omega MM'$.

(2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نعرف النقطة A_{n+1} بـ :

$$A_{n+1} = S(A_n) \text{ ونضع } u_n = A_n A_{n+1}$$

أ - يمثل النقط A_0 ، A_1 و A_2 وأنشئ هندسيا النقط A_3 ،

A_4 ، A_5 و A_6 .

ب - برهن أن المتتالية (u_n) هندسية .

(3) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

أ - عبر عن v_n بدلالة n .

ب - هل المتتالية (v_n) متقاربة ؟

(4) أ - أحسب بدلالة n ، نصف القطر r_n للدائرة المحيطة

والمثلث $\Omega A_n A_{n+1}$.

ب - عين أصغر عدد طبيعي p حيث ، من أجل كل عدد

طبيعي n : إذا كان $n > p$ ، فإن $r_n < 10^{-2}$.

الهدف هو دراسة بعض الخصائص للشكل المعطى .

ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر .

الشكل يتمثل في رباعي

مباشر $MNPQ$ ؛

و NSP ، MRN ،

QUM و PTQ

مثلثات قائمة ومتساوية

الساقين مباشرة واقعة خارج

الرباعي $MNPQ$.

الجزء I :

نعين الأعداد المركبة m ، n ، p و q لواحق النقط M ،

N ، P و Q على الترتيب .

1. ليكن f التشابه المباشر ذو المركز M والذي يحول

N إلى R .

أ - عين النسبة والزاوية للتشابه f .

ب - نضع r لاحقة النقطة R . برهن أن :

$$r = \frac{1+i}{2}m + \frac{1-i}{2}n$$

(يمكن استعمال الكتابة المركبة للتشابه f) .

$$\text{نقبل أنه كذلك } s = \frac{1+i}{2}n + \frac{1-i}{2}p$$

$$u = \frac{1+i}{2}q + \frac{1-i}{2}m \text{ و } t = \frac{1+i}{2}p + \frac{1-i}{2}q$$

s ، t و u لواحق النقط S ، T و U على الترتيب .

2. برهن أن للرباعيتين من النقط $(M ; N ; P ; Q)$

و $(R ; S ; T ; U)$ نفس مركز المسافات المتساوية .

3. أ - برهن المساواة $u - s = i(t - r)$.

ب - ما يمكن استنتاجه حول طولي القطعتين $[RT]$

و $[SU]$ هذا من جهة ؛ والمستقيمين (RT) و (SU) من

جهة أخرى ؟

الجزء II : في هذا الجزء نستعمل الأعداد المركبة .

1. برهن ، مستعملا النتائج المحصل عليها في الجزء I ،

أنه يوجد دوران وحيد g يحول R إلى S و T إلى U .

2. اشرح كيف يمكن إنشاء هندسيا النقطة Ω ، مركز

الدوران g . أنجز هذا الإنشاء على الشكل .

83 بكالوريا

الهدف من التمرين هو دراسة التشابهات المباشرة التي

تحول المجموعة S_1 لرؤوس مربع C_1 معطى ، إلى

المجموعة S_2 لرؤوس مربع C_2 معطى .

ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر

$(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ ، وحدة الرسم تؤخذ $2cm$.

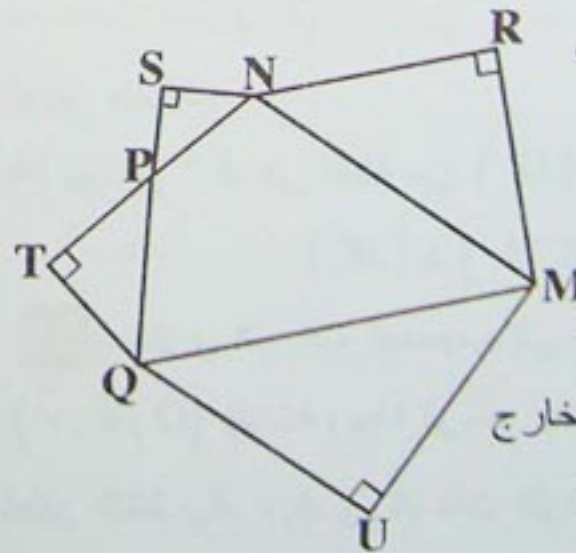
نعتبر النقط A ، B ، C ، D ، E ، F ، G و H

لواحقها على الترتيب : $-\frac{i}{2}$ ، $1 - \frac{i}{2}$ ، $1 + \frac{i}{2}$ ، $\frac{i}{2}$ ،

$1 - i$ ، $3 - i$ ، $3 + i$ ، $1 + i$

C_1 هو المربع ذو الرؤوس A ، B ، C و D مركزه O_1 ،

C_2 هو المربع ذو الرؤوس E ، F ، G و H مركزه O_2 .



S_1 هي إذن المجموعة $\{A, B, C, D\}$ و S_2 هي المجموعة $\{E, F, G, H\}$.

1. مثل كل النقط في المعلم $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

2. ليكن h التحاكي مركزه Ω ذي لاحقته -1 ونسبته 2 .

أعط الكتابة المركبة للتحاكي h وبين أن h يحول S_1 إلى S_2 .

3. ليكن s التشابه المباشر الذي يحول S_1 إلى S_2 و g

التحويل النقطي المعروف بـ $g = h^{-1} \circ s$.

أ- ما هي نسبة التشابه s ؟

ب- أثبت أن g تقايس وأن S_1 تكون صامدة إجمالياً به.

ج- برهن أن $g(O_1) = O_1$.

د- استنتج أن g هو أحد التحويلات التالية : التحويل

المطابق ، الدوران r_1 ذي المركز O_1 والزاوية π ،

الدوران r_2 ذي المركز O_1 والزاوية $\frac{\pi}{2}$ ، الدوران r_3 ذي

المركز O_1 والزاوية $-\frac{\pi}{2}$.

هـ- تشابهات المباشرة الأربع التي تحول S_1 إلى S_2 .

4. دراسة مراكز هذه التشابهات .

أ- عين العبارات المركبة لكل من $h \circ r_1$ ، $h \circ r_2$ و $h \circ r_3$.

ب- استنتج المراكز Ω_1 ، Ω_2 و Ω_3 لهذه التشابهات

وأرسمها في الكل .

84 (*) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس مباشر $(O; \bar{u}; \bar{v})$ وحدة الرسم تؤخذ $2cm$.

تعطى النقط A, C, D و Ω لواحقها على الترتيب

$1+i, 1, 3$ و $2+\frac{1}{2}i$.

الجزء I

1. لتكن الدائرة C ذات المركز Ω وتشمل النقطة A .

أ- بين أن الدائرة C تشمل النقطتين B و C .

ب- بين أن $[AD]$ هو قطر للدائرة C .

ج- في ورقة مليمتريّة أنجز شكلاً تمثل فيه النقط A, C, D

و Ω وأرسم C . نسمي B النقطة الثانية لتقاطع

الدائرة C والمستقيم (OA) .

د- بين أن النقطة O تقع خارج القطعة $[AB]$.

2. بين أن المثلثين OAD و OCB متشابهان وغير

متقايسين .

3. التشابه الذي يحول المثلث OCB إلى المثلث OAD .

أ- برهن أن S هو تشابه غير مباشر وليس تناظر محورياً.

ب- عين نقطة صامدة للتشابه S وبين أنها وحيدة .

الجزء II

1. أ- استنتج من السؤال 2. للجزء I أن :

$$OA \times OB = OC \times OD$$

ب- استنتج الطويلة وعمدة للاحقة z_B للنقطة B .

2. عين كتابة مركبة للتشابه S .

3. عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل $S \circ S$.

85 (*) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس مباشر $(O; \bar{u}; \bar{v})$. نعتبر التحويل النقطي T

يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث :

$$z' = -3i\bar{z} + 2 + 6i$$

1. أ- تعرّف على طبيعة التحويل T .

ب- نعين $M''(z'')$ صورة M' بالتحويل T . عبر

عن z'' بدلالة z .

عين طبيعة التحويل $T \circ T$ وعناصره المميزة .

2. أ- عبر عن الإحداثيتين x' و y' للنقطة M' بدلالة

الإحداثيتين x و y للنقطة M .

ب- برهن أن T يقبل نقطة صامدة وحيدة A يطلب

لاحقتها.

3. برهن أن T هو مركب تناظر محوري ذي المحور

(xx') متبوع بتشابه مباشر S يطلب تحديد عناصره

المميزة.

4. برهن أن T هو مركب للتحاكي ذي المركز A

والنسبة -3 ، والتناظر المحوري ذي المحور (d) ،

المستقيم معامل توجيهه 1 ويشمل النقطة A .

يمكن تعيين الطبيعة للتحويل $T \circ h^{-1}$ والاهتمام بنقطه

الصامدة.

5. ما هي المستقيمات التي تحول إلى مستقيم موازي

بالتحويل T ؟

86 في كل سؤال اختر الاقتراح الصحيح .

(1) التحويل الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z

النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = 2iz - 3$ هو :

أ. تناظر مركزي مركزه $\omega(-3; 2)$.

ب. تناظر محوري محوره المنصف الأول .

ج. تشابه مباشر إحداثيتي مركزه $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}\right)$.

د. تشابه مباشر إحداثيتي مركزه $(-3; 2)$.

(2) كتعريف المركب للتشابه المباشر ذي النسبة $\sqrt{3}$ ،

الزاوية $\frac{\pi}{2}$ والمركز النقطة $\Omega(1; \sqrt{3})$ هو :

أ. $z' = \sqrt{3}z + 4$ ب. $z' = i\sqrt{3}z + 1 + i\sqrt{3}$

ج. $z' = i\sqrt{3}z + 4$ د. $z' = i\sqrt{3}z + 4$

87 في كل سؤال اقتراح من بين الأربعة صحيح عيّه .

(1) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد

متجانس مباشر ، نعتبر النقطتين A و B لاحتقيهما على

الترتيب a و b . يكون المثلث MAB قائم ، متساوي

مستقي ومباشر رأسه M إذا وفقط إذا ، كانت للنقطة M

لاحقة z تحقق :

أ. $z = \frac{b-ia}{1-i}$ ب. $z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b-a)$

ج. $a - z = i(b - z)$ د. $b - z = \frac{\pi}{2}(a - z)$

(2) نعتبر في المستوي الموجّه نقطتين متميزتين A و B ؛

ونعتن I منتصف القطعة $[AB]$. ليكن f التشابه المباشر

ذي المركز A ، النسبة 2 و $\frac{2\pi}{3}$ قياس لزاويته ؛ ليكن g

التشابه المباشر ذي المركز A ، النسبة $\frac{1}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$ قياس

لزاويته ؛ ليكن h التناظر المركزي ذي المركز I .

أ. $h \circ g \circ f$ يحول A إلى B وهو دوران .

ب. $h \circ g \circ f$ هو التناظر بالنسبة إلى محور $[AB]$.

ج. $h \circ g \circ f$ هو ليس تشابهها مباشرا .

د. $h \circ g \circ f$ هو الانسحاب الذي شعاعه $\overline{AB}$.

88 ميّز بين الجمل الصحيحة والجمل الخاطئة .

(1) الكتابة المركبة $z \mapsto 2iz$ تعرف تشابه مباشر ذي النسبة 4 .

(2) الكتابة المركبة $z \mapsto 3z + 4$ تعرف تحاك نسبته 3 .

(3) الكتابة المركبة $z \mapsto (1+i)z$ تعرف تشابه مباشر

زاويته $\frac{\pi}{4}$.

(4) الكتابة المركبة $z \mapsto -3iz + 3i$ تعرف تشابه مباشر

زاويته $\frac{3\pi}{2}$.

89 أذكر في كل حالة إن كانت الجملة المقترحة

صحيحة أم خاطئة .

(1) التناظر المحوري بالنسبة إلى مستقيم هو تشابه مباشر .

(2) الدوران في المستوي هو تشابه مباشر نسبته .

(3) التحاكي في المستوي هو تشابه مباشر معرف بنفس

المركز ونفس النسبة .

(4) التناظر المركزي في المستوي هو تشابه مباشر زاويته

π ويعرف بنفس المركز .

(5) مبدأ المعلم هو مركز لكل تشابه مباشر الذي يعرف بـ :

$z' = (a+bi)z$ مع a و b عددين مركبين .

90 (2) ω نقطة لاحقها 2 ؛ S التحويل النقطي في

المستوي يرفق بكل $M(z)$ ، $M'(z')$ حيث :

$$z' = \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)z + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

ما قولك عن العبارات التالية ؟

(1) التحويل S هو تشابه مباشر في المستوي .

(2) التحويل S له نقطة صامدة وحيدة وهي ω .

(3) المثلث $\omega MM'$ قائم في M' .

(4) $(\overline{\omega M'}; \overline{\omega M}) = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

(5) نعتبر الدوران $R\left(O; -\frac{\pi}{6}\right)$ ؛ التحويل النقطي $S \circ R$

هو تحاك .

الكفاءات المستهدفة

- ◆ توظيف الجداء السلمي لإثبات تعامد مستقيمين ، تعامد مستويين و تعامد مستقيم و مستوي
- ◆ توظيف الجداء السلمي لتعيين معادلة ديكارتية لمستوي .
- ◆ توظيف الجداء السلمي لحساب المسافة بين نقطة و مستوي .
- ◆ توظيف الجداء السلمي لتعيين مجموعات النقاط .

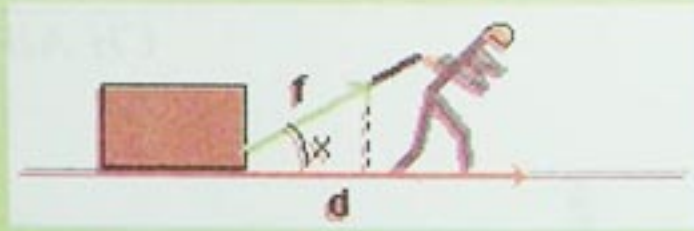
من مفهوم الجداء السلمي يظهر بوضوح في علم الحركة (عمل قوة)

و تفسير ذلك أنه إذا كانت القوة f تحرك جسما وفق مسار خطي d يعطى عندئذ العمل المنجز W

$$w = |f| \cdot |d| \cdot \cos x$$

بالدستور

حيث $|f|$ هي شدة القوة ، $|d|$ هو مسافة الانتقال و x هو قياس الزاوية المحصورة بين اتجاهي القوة والانتقال .



و للجداء السلمي تطبيقات في مجالات كثيرة في الفيزياء نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر :

✓ الطاقة و عزم الحركة لجسم

✓ حركة السوائل

✓ الكهرو مغناطيسية

✓ معادلة ماكس وال Maxwell (إنجليزي 1831 – 1879)

✓ قوة لورونتز Lorentz (هولندي 1853 – 1928)

✓ علم النفس القياسي

نشاط أول

ABC مثلث و (d) مستقيم يشمل A ، B' المسقط العمودي للنقطة B على (d) ، C' ،

المسقط العمودي للنقطة C على (d) ، B'' المسقط العمودي للنقطة B' على (AC) ، C'' المسقط العمودي للنقطة C' على (AB) . I نقطة تقاطع المستقيمين (B'B'') و (C'C'') .

$$(1) \text{ بين أن } \overline{AC} \cdot \overline{AI} = \overline{AC} \cdot \overline{AB'} = \overline{AC'} \cdot \overline{AB''} \text{ و } \overline{AB} \cdot \overline{AI} = \overline{AB} \cdot \overline{AC'} = \overline{AB'} \cdot \overline{AC''}$$

(2) استنتج أن المستقيمين (BC) و (AI) متعامدان.

نشاط ثان

$\vec{u}, \vec{v}$ شعاعان من المستوي

$$(1) \text{ بين أن } \|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\| = 2(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|) \text{ و } \|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u} - \vec{v}\| = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(2) \text{ بين أن } (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

(3) استنتج أن قطري متوازي أضلاع يكونان متعامدين إذا كانت أضلاعه متقايسة .

نشاط ثالث

ABC مثلث كفي ، A' ، B' و C' المساقط العمودي للنقطة A ، B و C على (BC) ،

(AC) و (AB) على الترتيب . H نقطة تقاطع (BB') و (CC') .

$$(1) \text{ أحسب : } \overline{CH} \cdot \overline{AB} \text{ و } \overline{BH} \cdot \overline{AC}$$

$$(2) \text{ أحسب : } \overline{AH} \cdot \overline{BC}$$

(3) ماذا تستنتج ؟

نشاط رابع

في معلم متعامد و متجانس (O, I, J) ، (C) هي الدائرة التي معادلتها

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 . T \text{ نقطة إحداثياتها } (3 ; 4)$$

(1) عين H مركز الدائرة و R نصف قطرها . أرسم هذه الدائرة و علم النقطة T .

(2) نرسم من T المماسين للدائرة (C) في النقطتين A و B . بين أن A و B تنتميان إلى دائرة (C') .
قطرها [HT] .

(3) أكتب معادلة للدائرة (C') ، عين إحداثيات A و B .

(4) أكتب معادلة لكل من المماسين .

A ، B نقطتان متميزتان من المستوي حيث $AB = 2$. E مجموعة النقط M من المستوي

حيث $\frac{MA}{MB} = 3$

(1) بين أن M نقطة من (E) إذا وفقط إذا $MA^2 - 9MB^2 = 0$

(2) ليكن G مرجح $\{(A, 1), (B, 3)\}$ و K مرجح الجملة $\{(A, -1), (B, -3)\}$

- بين أن G و K نقطتان من (E)

(3) عبر عن $MA^2 - 9MB^2$ بدلالة $\overline{MG}$ و $\overline{MK}$ ثم استنتج طبيعة المحل الهندسي (E)

نشاط سادس

في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نعرف النقطة $A(-2, 5)$ والمستقيم (d)

إذا المعادلة $y = -3x + 1$.

(1) لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على (d) . عين إحداثيي H ، واحسب المسافة AH .

(2) (a) نعتبر الدالة العددية f حيث $f(x) = 10x^2 + 28x + 20$

- أدرس اتجاه تغير الدالة f و استنتج القيم الحدية لها .

(b) M نقطة من (d) . أحسب AM^2 بدلالة x

- استنتج بعد النقطة A عن (d) .

نشاط سابع

نعتبر المكعب OADBCFGE ، I مركز المربع DBEG الذي طول ضلعه 4 ، L و K

النقطتان المعرفتان كما يلي $\overline{AK} = \frac{5}{8}\overline{AF}$ و $\overline{CL} = \frac{5}{8}\overline{CE}$

نعتبر المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ من الفضاء $\vec{k} = \frac{1}{4}\overline{OC}$ ، $\vec{j} = \frac{1}{4}\overline{OA}$

(1) أوجد إحداثيات النقط A ، C ، E ، I ، K و L

(2) بين أن المثلث KIL قائم و أعط قيمة مقربة إلى 0,1 لقيس الزاوية $\widehat{KLI}$

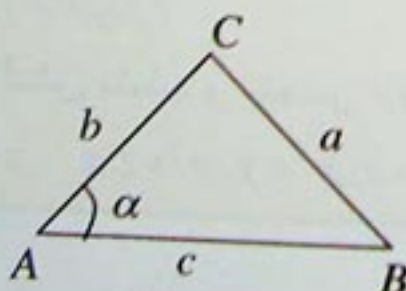
(3) باستعمال علاقة الكاشي (في مثلث ما $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ ،

عين قيمة مقربة إلى 0,1 لقيس الزاوية $\widehat{KCI}$

(4) أ) أكتب معادلة لسطح الكرة S ذات المركز $w(2; 2; 2)$ و التي تشمل O

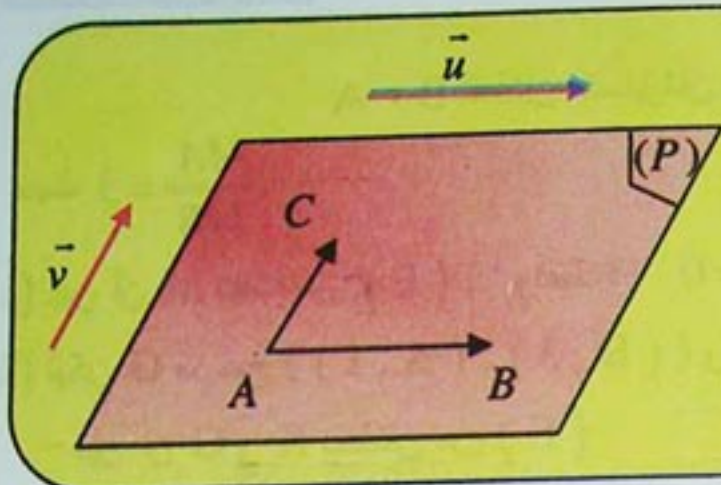
ب) تحقق أن S تمس أوجه المكعب من الداخل .

ج) عين تقاطع S مع المستوي الذي معادلته $z = 0$



الجداء السلمي في الفضاء

1. تعريف :



$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء . A ، B و C ثلاث نقط

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} , \vec{v} = \overrightarrow{AC} \text{ حيث}$$

يوجد على الأقل مستو (P) يشمل النقط A ، B و C بحيث
الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للشعاعين

$\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ في المستوي (P)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \text{ : ملاحظة : في المستوي لدينا :}$$

و هي عبارة مستقلة عن تمثيل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وبالتالي مستقلة عن المستوي (P)

خواص : كل خواص الجداء السلمي في المستوي تطبق على الأشعة من نفس المستوي في الفضاء

نتيجة : $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء ينتميان إلى نفس المستوي ، k عدد حقيقي

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 , (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) , \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} , \vec{u} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \text{ : لدينا :}$$

خاصية : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ لدينا . أشعة من الفضاء $\vec{w}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}$

تعريف : يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين إذا و فقط إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

ملاحظة : $\vec{0}$ عمودي على كل شعاع من الفضاء.

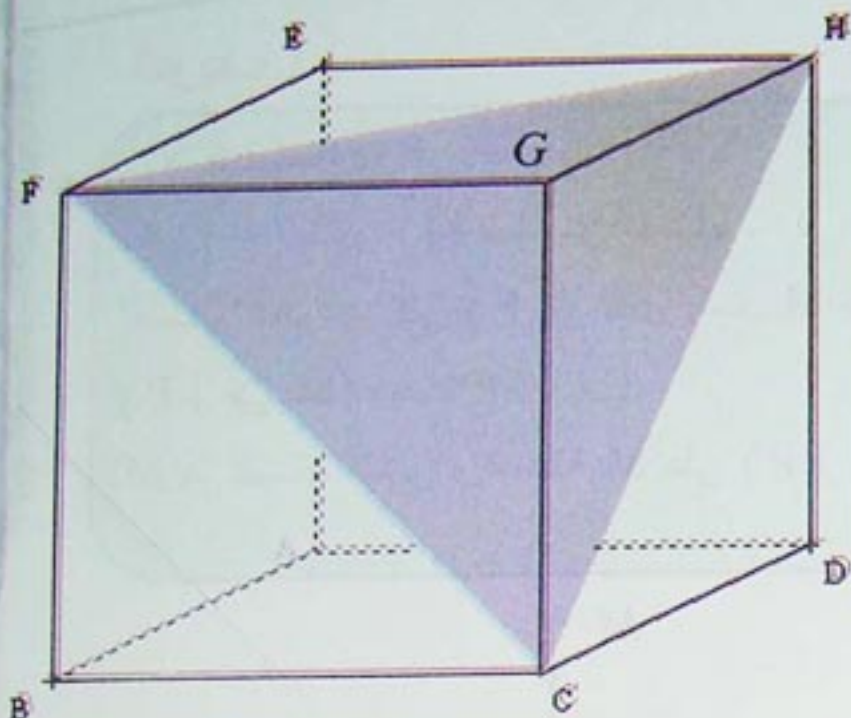
العبارة التحليلية :

في أساس متعامد و متجانس ليكن $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z' \text{ : لدينا :}$$

نتيجة : لتكن النقطتين $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ في معلم متعامد و متجانس من الفضاء

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \text{ لدينا}$$



تمرين محلول 1 :

نعتبر المكعب ABCDEFGH .

بين أن المستقيم (AG) عمودي على المستوى (CFH) .

طريقة: لإثبات أن مستقيما عمودي ما على مستوي يكفي

أن نثبت أن هذا المستقيم عمودي على مستقيمين متقاطعين من المستوي

الحل:

في المستوي (CFH) المستقيمان (FH) و (FC) متقاطعان في F .

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FH} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}) \cdot \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH}$$

وبما أن EFGH مربع فإن قطريه متعامدان ومنه $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$.

وبما أن المستقيم (AE) عمودي على المستوي (FGH) فإن $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$ ، وبالتالي $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$

$$\text{لدينا كذلك : } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{FC}$$

وبما أن BCGF مربع فإن قطريه متعامدان و بالتالي $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$.

وبما أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (BCF) ، إذن $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$ ، وبالتالي $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$

المستقيم (AG) عمودي على المستقيمين المتقاطعين (HF) و (FC) من المستوي (CFH) ، أي أن (AG) عمودي على (CFH) .

تمرين محلول 2:

في معطى متعامد و متجانس من الفضاء لدينا النقط $A(-1; -2; 0)$ ، $B(3; 1; -2)$ ، $C(-2; 0; 1)$ ، $D(2; -1; 0)$

(1) هل المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان ؟

(2) هل المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان ؟

$$\text{الحل : لدينا } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} , \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(1) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 16 - 3 + 2 = 15 \neq 0$$

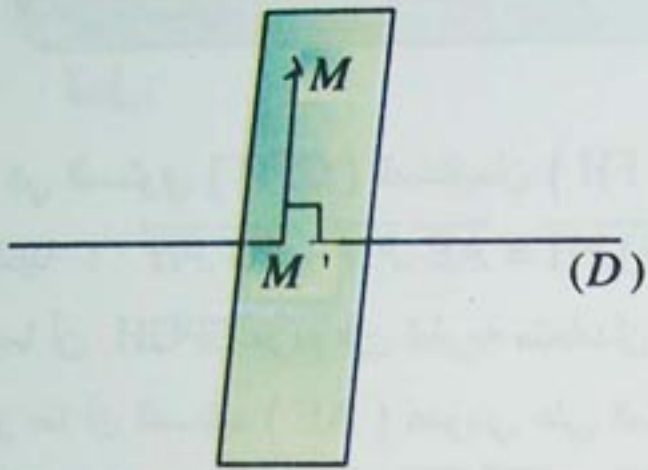
و بالتالي (AB) و (CD) ليسا متعامدين

$$(2) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 + 6 - 2 = 0$$

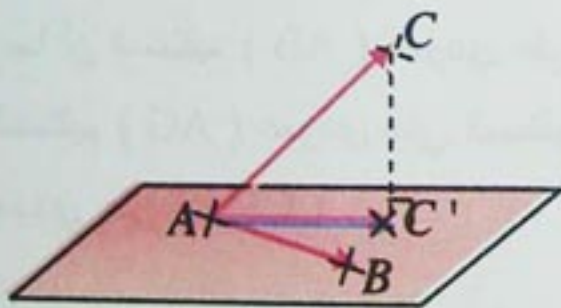
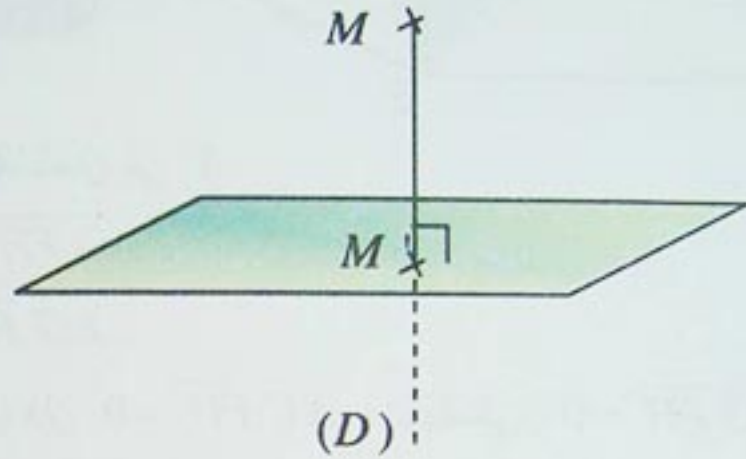
و بالتالي (AB) و (AC) متعامدان

تعريف :

الإسقاط العمودي على مستقيم
(D) مستقيم ، M نقطة من الفضاء .
المستوي العمودي على (D) و الذي يشمل M يقطع
(D) في نقطة وحيدة M' .
M' هو المسقط العمودي لـ M على (D)



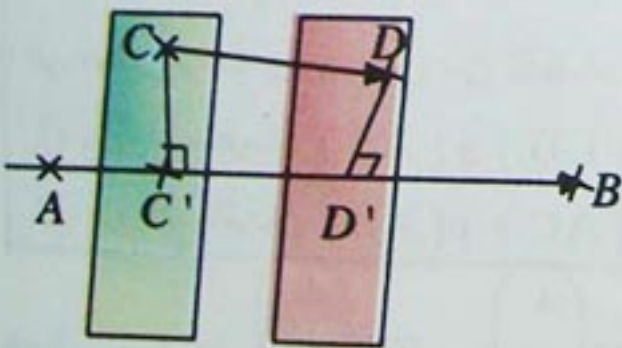
الإسقاط العمودي في الفضاء
ليكن (P) مستوي ، M نقطة من الفضاء .
المستقيم العمودي على (P) و الذي يشمل M يقطع
(P) في نقطة وحيدة M' .
M' هو المسقط العمودي للنقطة M على (P)



ليكن A ، B نقطتان من المستوي (P) و C نقطة لا تنتمي إلى (P)

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC'}$$

حيث C' المسقط العمودي لـ C على (P)



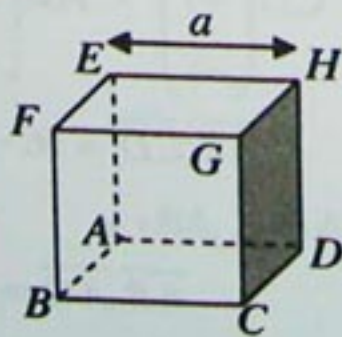
$$\vec{v} = \overline{CD} \text{ و } \vec{u} = \overline{AB} \neq \vec{0}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{C'D'}$$

حيث C' و D' المسقطان العموديان للنقطتين C و D

على الترتيب على المستقيم (AB)

مثال : نعتبر المكعب ABCDEFGH الذي ضلعه a



$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{EG} &= \overline{AB} \cdot \overline{EF} \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{AB} = a^2 \end{aligned}$$

تمرين محلول 3 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

- (1) نعتبر (S) سطح الكرة التي مركزها $W(2, 1, 0)$ و نصف قطرها $\sqrt{2}$. أكتب معادلة ديكارتية لـ (S)
 (2) نعتبر (S') سطح الكرة التي قطرها [AB] حيث $A(1, 0, -2)$ ، $B(0, -1, 2)$.
 عين قيمتي العدد الحقيقي a حتى تكون النقطة $C(a, 1, 0)$ نقطة من (S') .

الحل:

(1) لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من (S) أي أن $WM = \sqrt{2}$

$$(S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$$

أو $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ معادلة ديكارتية لـ (S)

(2) لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من (S') أي أن $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$$\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -x \\ -1-y \\ 2-z \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ -2-z \end{pmatrix} \text{ يكتبان}$$

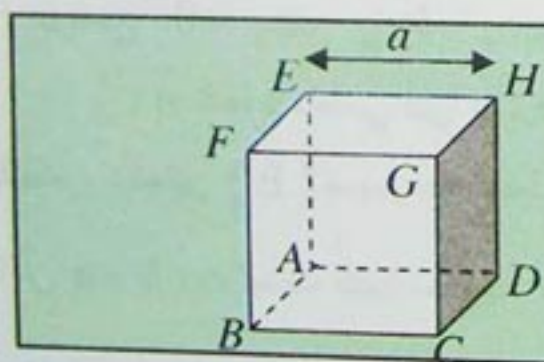
M نقطة من (S') يعني $(x-1)x + y(y+1) + (z+2)(z-2) = 0$

$$(S') : x^2 + y^2 + z^2 - x + y - 4 = 0 \text{ معادلة ديكارتية لـ } (S')$$

تمرين محلول 4 :

في المكعب ABCDEFGH الذي ضلعه a .

أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{HC}$.



الحل:

لتكن D المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (AEH)

$$\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CD} \text{ لأن } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{HD}$$

$$= -\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE}$$

$$= -a^2$$

1. تعريف :

كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من مستوى (P) هو شعاع عمودي على (P)

نتيجة : إذا كان $\vec{n}$ شعاعا ناظميا (عموديا) على (P) فإن $\vec{n}$ عمودي على كل شعاع من المستوي (P) .

و بالتالي كل مستقيم موجه بالشعاع $\vec{n}$ هو مستقيم عمودي على (P) .

2. تمثيل مستوي :

$\vec{n}$ شعاع غير معدوم . A نقطة من الفضاء

مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ هي المستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له

برهان : نعتبر المستقيم (D) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع توجيه له ، والمستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له .

إذا كانت M نقطة من (P) فإن $\overrightarrow{AM}$ شعاع من (P) وبالتالي $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

وبالعكس نعتبر نقطة M من الفضاء حيث $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (D)

وبالتالي $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ لأن $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ لكن $\overrightarrow{AH}$ و $\vec{n}$ مرتبطين خطيا ، إذن $\overrightarrow{AH} = \vec{0}$ لأن $(\vec{n} \neq \vec{0})$ و

بالتالي $A = H$ ، المسقط العمودي لـ M على (D) هو A أي أن M نقطة من (P)

خاصية : كل مستوى $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له يقبل معادلة ديكارتية من الشكل $ax + by + cz + d = 0$

حيث d عدد حقيقي

و بالعكس فإن مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق $ax + by + cz + d = 0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية غير معدومة معا هي مستوى و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له .

برهان : $A(x_A; y_A; z_A)$ نقطة من المستوي (P) و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي لـ (P)

تكون النقطة $M(x; y; z)$ نقطة من (P) إذا و فقط إذا $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ أي :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{نجد} \quad d = -ax_A - by_A - cz_A = 0$$

$\vec{n}$ شعاع ناظمي فإن a ، b ، c ليست كلها معدومة

و بالعكس : نعتبر (E) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث $ax + by + cz + d = 0$

بما أن a ، b ، c ليست كلها معدومة ، نأخذ مثلا $a \neq 0$ و نعتبر النقطة $A(-\frac{d}{a}; 0; 0)$. A نقطة من (E)

و لدينا $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع غير معدوم . من أجل كل نقطة $M(x; y; z)$ من الفضاء لدينا

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x + \frac{d}{a}) + by + cz = ax + by + cz + d$$

M نقطة من (E) يعني $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ و بالتالي (E) هو المستوي الذي يشمل A و $\vec{n}$ ناظمي له .

حالات خاصة

(P) و (P') مستويان $\vec{n}$ ، $\vec{n}'$ ناظميان لهما على الترتيب

(P) يوازي (P') معناه يوجد k حقيقي حيث $\vec{n} = k \cdot \vec{n}'$

(P) عمودي على (P') معناه $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$

معادلة ديكارتية للمستوي $(o; \vec{i}; \vec{j})$ هي $z = 0$

معادلة ديكارتية للمستوي $(o; \vec{j}; \vec{k})$ هي $x = 0$

معادلة ديكارتية للمستوي $(o; \vec{i}; \vec{k})$ هي $y = 0$

تمرين محلول 5 : في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر النقط $A(-2; 0; 1)$

$$B(1; 0; -3) , C(1; -1; 2)$$

1. بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا .
2. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
3. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و $\overline{BC}$ شعاع ناظمي له .

الحل:

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ و } \overline{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ نلاحظ أن } x_{\overline{AB}} = x_{\overline{AC}} \text{ و لكن } y_{\overline{AB}} \neq y_{\overline{AC}}$$

وبالتالي الشعاعان $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ غير مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B ، C تعين مستويا
(2) نبحث عن شعاع ناظمي للمستوي (ABC) . ليكن $\vec{n}$ هذا الشعاع عمودي على الشعاعين $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$

$$\vec{n} \cdot \overline{AB} = 0 , \vec{n} \cdot \overline{AC} = 0 . \text{ مركبات الشعاع } \vec{n} \text{ هي حل للجملة : } \begin{cases} 3a - 4c = 0 \\ 3a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{نأخذ } a = 4 \text{ فيكون } c = 3 \text{ و } b = 15 \text{ أي } \vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3) تكون $M(x; y; z)$ نقطة من (ABC) إذا و فقط إذا $\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$
أي $4(x+2) + 15y + 3(z-1) = 0$ أو $4x + 15y + 3z + 5 = 0$ وهي معادلة ديكارتية لـ (P)

تمرين محلول 6 : في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر النقط $A(1; 0; 0)$

$$B(0; 1; 0) , C(0; 0; 1)$$

- (1) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل النقط A ، B ، C
- (2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي (ABC) و يشمل النقطة O

الحل:

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ و } \overline{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \text{ ليكن } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ شعاعا ناظما لـ } (ABC) \text{ إذن } \begin{cases} -a + b = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases} \text{ أي } a = b = c$$

$$\text{نأخذ } a = 1 \text{ مثلا فيكون } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$M(x; y; z)$ نقطة من (ABC) إذا و فقط إذا كان $\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$ أي أن $x - 1 + y + z = 0$

أو $x + y + z - 1 = 0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

(2) تكون النقطة $M(x; y; z)$ نقطة من (P) إذا و فقط إذا كان $\overline{OM} \cdot \vec{n} = 0$

أي أن $x + y + z = 0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي (P)

بعد نقطة عن مستوي

في معلم متعامد و متجانس ، نعتبر المستوي (P) حيث $ax + by + cz + d = 0$ ، $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ معادلة ديكارتية له . A نقطة إحداثياتها $(x_A; y_A; z_A)$.

البعد بين A و (P) هو العدد الحقيقي الموجب $\frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

المرجح

مبرهنة: $\{(A_1; a_1), (A_2; a_2), \dots, (A_n; a_n)\}$ جملة لـ n نقطة مثقلة حيث $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$: توجد نقطة وحيدة G تحقق

$$a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

عندما تتساوى المعاملات غير المعدومة a_i ، تسمى G مركز ثقل الجملة .

مبرهنة: من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون

$$a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{MG}$$

التمييز بالمرجح:

$$\begin{array}{c} ab < 0 \quad B \quad ab > 0 \quad A \quad ab < 0 \\ |a| > |b| \quad B = 0 \quad a = 0 \quad |a| < |b| \end{array}$$

A ، B ، C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

① المستقيم (AB) هو مجموعة مراجيح للنقطتين A ، B

② القطعة [AB] هي مجموعة مراجيح للنقطتين A ، B مرفقتين بمعاملين من نفس الإشارة

③ المستوي (ABC) هو مجموعة مراجيح للنقط A ، B ، C

برهان: (1) نقطتان متميزتان . M مرجح $\{(A; a), (B; b)\}$ مع $a + b \neq 0$ إذن $\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$

أي أن النقطة M نقطة من (AB) . و بالعكس M نقطة من (AB) فالشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً

وبالتالي يوجد عدد k حيث $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AM} + k \overrightarrow{MB}$ أي $(k-1)\overrightarrow{MA} + k \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

M مرجح الجملة $\{(A; 1-k), (B; k)\}$

(2) نفس البرهان بأخذ k عدد حقيقي من المجال [0 ; 1]

مثال 1: A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء . نريد تعيين (E) مجموعة النقط من الفضاء حيث

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3$$

نفرض أن G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; 1), (C; 1)\}$ هي مركز ثقل المثلث ABC

لدينا $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ و بالتالي فإن المجموعة (E) هي مجموعة النقط M التي تحقق $MG = 1$

فهي سطح الكرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

مثال 2: (F) مجموعة النقط M حيث $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\|$. نذكر H مرجحاً للجملة

$$\{(A; 1), (B; 2)\}$$

و بالتالي (F) تحقق $\|\overrightarrow{3MG}\| = \|\overrightarrow{3MH}\|$ أي $MG = MH$

(F) هو المستوي محور [GH]

تمرين محلول 7:

في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $3x - 2y + 5z - 4 = 0$.

- (1) عين بعد النقطة $A(1; -2; 7)$ عن المستوي (P) .
- (2) عين بعد النقطة $B(2; 1; 0)$ عن المستوي (P) . ماذا تستنتج ؟

الحل:

$$d_1 = \frac{|3(1) - 2(-2) + 5(7) - 4|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \sqrt{38} \quad (1)$$

$$(2) \quad d_2 = 0 \quad \text{نستنتج أن النقطة } B \text{ هي نقطة من المستوي } (P)$$

تمرين محلول 8:

البرهان أن المستوي المعين بثلاث نقط A, B, C هو مجموعة المراجيح للنقط A, B, C

الحل

لكن لنقط A, B, C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .

M مرجح الجملة $\{(A;a), (B;b), (C;c)\}$ مع $a+b+c \neq 0$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC} \quad \text{نبتا}$$

و بالتالي M نقطة من (ABC)

و بالعكس

A, B, C ليست على استقامة واحدة وبالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ يشكلان أساسا للمستوي

لكن نقطة M من (ABC) يوجد $(x; y)$ زوج من الأعداد الحقيقية

$$\text{حيث : } \overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$$

$$\text{أي : } \overrightarrow{AM} = x (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + y (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$$

$$\text{أو } (1-x-y) \overrightarrow{MA} + x \overrightarrow{MB} + y \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\text{لكن } 1-x-y+x+y=1 \neq 0$$

و بالتالي M مرجح للجملة $\{(A;1-x-y), (B;x), (C;y)\}$

A, B, C ثلاث نقط من الفضاء ، ليست على استقامة واحدة . k عدد حقيقي من المجال $[-1; 1]$

G_k مرجح الجملة $\{(A; k^2 + 1), (B; k), (C; -k)\}$.

(1) مثل النقط A, B, C و I منتصف $[BC]$ ثم أنشئ النقطتين G_1 و G_2

(2) a بين أنه من أجل كل k من المجال $[-1; 1]$ لدينا :

$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}$$

(b) شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $[-1; 1]$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$$

(c) استنتج مجموعة النقط G_k لما k يسمح المجال $[-1; 1]$

(3) عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

(4) عين (F) مجموعة النقط M من الفضاء حيث

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

(5) الفضاء منسوب الآن إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، النقط A, B, C تأخذ الإحداثيات $(0; 0; 2)$ ،

$(-1; 2; 1)$ و $(-1; 2; 5)$ على الترتيب .

(a) عين إحداثيات G_1 و G_2 ، تحقق أن (E) و (F) يتقاطعان .

(b) أحسب نصف قطر الدائرة (C) تقاطع (E) و (F) .

نعتبر المكعب $OABCO'A'B'C'$ و لتكن J منتصف $[OA]$ و G مرجح الجملة $\{(O;1), (A;1), (C;3)\}$.
حرف المكعب يؤخذ كوحدة .

(I) 1) تحقق أن الشعاعين $\overline{CG}$ و $\overline{CJ}$ مرتبطان خطيا ثم عين G على الشكل

(2) ما هي إحداثيات G في المعلم $(O; \overline{OA}; \overline{OC}; \overline{OO'})$ ؟

(II) 1) M نقطة كيفية من الفضاء ، عبّر عن $\overline{MO} + \overline{MA} + 3\overline{MC}$ بدلالة $\overline{MG}$.

(2) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $(\overline{MO} + \overline{MA} + 3\overline{MC}) \cdot \overline{MB} = 0$

(III) 1) عين (F) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $(\overline{MO} + \overline{MA} + 3\overline{MC}) \cdot (\overline{MO} + \overline{MA} - 3\overline{MC}) = 0$

(2) تحقق أن الشعاعين $\overline{BG}$ و $\overline{CJ}$ متعامدان و استنتج أن B نقطة من (F) و B' هي أيضا نقطة من (F)

(3) - أنشئ تقاطعات (F) مع أوجه المكعب .

- K و K' نقطتا تقاطع (F) مع المستقيمين (OC) و ($O'C'$) على الترتيب ، ما طبيعة الرباعي $BKK'B'$ ؟

(VI) عين (H) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overline{AM} \cdot \overline{B'G} = 2$

(V) 1) باستعمال الإحداثيات في المعلم المذكور أعلاه ، أحسب GO^2 ، GA^2 و GC^2 ثم العدد $GC^2 + GA^2 + GO^2$

(2) M نقطة من الفضاء ، عبّر عن $MO^2 + MA^2 + 3MC^2$ بدلالة MG^2 (باستعمال الشعاع $\overline{MG}$ وعلاقة شال).

(3) نسمي (L) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق $MO^2 + MA^2 + 3MC^2 = 4$.

(a) بين أن O تنتمي لـ (L)

(b) تحقق أن M نقطة من (L) إذا وفقط إذا $MG^2 = k^2$ حيث k عدد حقيقي يطلب تعيينه .

(c) استنتج طبيعة (L) ثم أنشئ تقاطع (L) مع الوجه $OABC$ (أي أثر (L) على الوجه $OABC$ للمكعب).

(2) لتكن C' مرجح الجملة $\{(A;b);(C;c)\}$ ، بين

أن $AB'A'C'$ معين .

(3) لتكن I مرجح الجملة $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ ،

بين أن I هو مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC .

ABC مثلث ، نضع $BC = a$ ، $AB = c$ ، $AC = b$

نعتبر A' مرجح الجملة $\{(B;b);(C;c)\}$

$$(1) \text{ نعرف النقطة } B' \text{ بـ : } \overline{AB'} = \frac{b}{b+c} \overline{AB}$$

بين أن B' مرجح النقطتين A و B مرفقتين بمعاملين

يطلب تعيينهما .

تعاليف

تبيان المرجح هنا يستدعي

توفير العلاقة الشعاعية

لكي نبين أنه معين يكفي و

يلزم تحقيق الخواص المميزة له

حل مختصر

$$(1) \overline{AB'} = \frac{b}{b+c} \overline{AB} \text{ إذن } (b+a)\overline{AB'} = b(\overline{AB'} + \overline{B'B})$$

$$\text{و منه } -c\overline{AB'} = b\overline{B'B} \text{ أي } c\overline{B'A} + b\overline{B'B} = \vec{0}$$

B' هو مرجح الجملة $\{(A;c);(B;b)\}$

$$(2) \text{ بما أن } C' \text{ هو مرجح الجملة } \{(C;c);(B;b)\} \text{ فإن } \overline{CA'} = \frac{b}{b+c} \overline{CB}$$

لدينا $\overline{C'A'} = \overline{C'C} + \overline{CA'}$ و بالتالي

$$\overline{C'A'} = \frac{b}{b+c} \overline{AB} \text{ أي } \overline{C'A'} = \frac{b}{b+c} \overline{AC} + \frac{b}{b+c} \overline{CB}$$

إذن $\overline{C'A'} = \overline{AB'}$ (أي أن $AB'A'C'$ متوازي أضلاع)

b و c عدنان حقيقيان موجبان ، نحصل على :

$$\overline{AB'} = \frac{b}{b+c} \overline{AB} = \frac{bc}{b+c} \text{ إذن } \overline{AB'} = \frac{b}{b+c} \overline{AB}$$

و كذلك $AC' = \frac{bc}{b+c}$ و بالتالي $AC' = AB'$ ($AB'A'C'$ معين)

(3) (AA') هو منصف داخلي للزاوية $\widehat{B'AC'}$ لأن الرباعي معين

$$\text{لكن } 0 < \frac{b}{b+c} < 1 \text{ و } 0 < \frac{c}{b+c} < 1 \text{ إذن}$$

$$B' \in [AB] \text{ و } C' \in [AC]$$

(AA') هو إذن منصف داخلي للزاوية $\widehat{BAC}$

I هو مركز الجملة $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ ، إذن I هو مركز

الجملة $\{(A;a);(A';b+c)\}$ حسب خاصية التجميع

و بالتالي $I \in (AA')$

بنفس الطريقة و بتعريف النقطة B_1 مركز $\{(A;a);(C;c)\}$

نثبت أن (BB_1) هو المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{ABC}$ (حسب التجميع) I

هو مرجح الجملة $\{(B;b);(B_1;a+c)\}$

إذن $I \in (BB_1)$ ، I ملتقى المنصفين الداخليين في المثلث ABC

(1) ليكن ABCDEFGH مكعباً ضاعه a و T هو رباعي الوجوه AFCH.

(a) ماذا يمكن القول عن أوجه رباعي الوجوه AFCH ؟

(b) أحسب حجم رباعي الأوجه AEFH.

(c) عيّن حجم T .

(d) استنتج المسافة بين A و المستوي (HFC).

(2) لتكن J منتصف $[FC]$.

(a) بين أن $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$. ماذا تستنتج ؟

(b) أحسب $\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JH}$ بدلالة a .

(c) استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} لقيس الزاوية $\widehat{AJH}$ (بالدرجات).

توجيهات

(1) (a) لاحظ أن أوجه AFCH هي مثلثات متقايسة الأضلاع طول كل ضلع $a\sqrt{2}$.

$$V_{AEFH} = \frac{1}{3} \cdot S_{HFC} \times FE \quad (b)$$

$$V_{AECH} = \frac{1}{3} \cdot S_{HFC} \times d(A, (HFC)) \quad (d)$$

$$\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JH} = \frac{1}{2} (JA^2 + JH^2 - AH^2) \quad (b) \quad (2)$$

و انتبه إلى أن JA هو ارتفاع في المثلث AFC

(c) هل تذكر كيف يتم تدوير عدد حقيقي ؟ عد إلى الدرس من برنامج السنة الأولى

1 ABCDEFGH مكعب ، ضلعه A

(1) أحسب :

$$(a) \overline{AB} \cdot \overline{AC} \quad (b) \overline{AB} \cdot \overline{CD} \quad (c) \overline{AB} \cdot \overline{FG} \\ (d) \overline{DB} \cdot \overline{GC} \quad (e) \overline{DB} \cdot \overline{HF} \quad (f) \overline{ED} \cdot \overline{EC}$$

(2) أحسب $\overline{AG} \cdot \overline{BE}$ و $\overline{AG} \cdot \overline{BD}$

استنتج أن المستقيم (AG) عمودي على المستوى (BED)

(3) نعتبر المعلم $(D; \overline{DA}; \overline{DC}; \overline{DH})$

عين احداثيات النقط A ، B ، G ، E و D ثم اثبت مجددا

أن (AG) عمودي على المستوى (BED)

2 نعتبر النقط $A(0; -1; 1)$ ، $B(4; -2; 3)$ و

$C(-1; 2; -3)$

(1) أحسب $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ، $\overline{BA} \cdot \overline{AC}$ و $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$

(2) عين قيمة مقربة الى $0,1^\circ$ (درجة) لأقياس الزوايا

$\widehat{BAC}$ ، $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ACB}$

3 ABCD رباعي وجوه منتظم

$$BD = AD = AC = CD = BC = AB = a$$

(1) عين طبيعة وجوه ABCD

(2) أحسب بدلالة a ، $\overline{BA} \cdot \overline{BD}$ و $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$

(3) استنتج قيمة $\overline{BA} \cdot \overline{CD}$

(b) بين أن الأحرف المتقابلة لـ ABCD متعامدة متنى

متنى .

(4) H المسقط العمودي لـ A على المستوى (BCD)

(a) أحسب $\overline{BH} \cdot \overline{CD}$ (نضع $\overline{BH} = \overline{BA} + \overline{AH}$)

(b) بين أن H ملتقى ارتفاعات المثلث BCD .

(5) (a) أحسب AH بدلالة a .

(b) أحسب حجم الهرم ABCD بدلالة a .

4 ABCD رباعي وجوه منتظم طول ضلعه a . I ، J

و K منتصفات [BC] ، [BD] و [AC] على الترتيب

أحسب : (a) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ (b) $\overline{AD} \cdot \overline{AK}$

(c) $\overline{AB} \cdot \overline{JK}$ (d) $\overline{AD} \cdot \overline{JK}$

5 نعتبر المثلث ABC القائم في C و ليكن H المسقط

العمودي للنقطة C على (AB) نضع : $CA = b$ ،

$CH = h$ ، $CB = a$

$$(1) \text{ بين أن } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

(2) OABC رباعي وجوه حيث (OA) ، (OB) و (OC)

متعامدة متنى متنى . H المسقط العمودي لـ O على

المستوي (ABC)

(a) بيت أن H هو ملتقى الارتفاعات في المثلث ABC

(b) بين أن (AB) عمودي على المستوى (OCH)

(c) (CH) يقطع (AB) في K ، بين أن (OK)

ارتفاع في المثلث OAB .

(d) تحقق من المساواة :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OC^2}$$

6 SABCD هرم قاعدته المربع ABCD الذي

مركزه O و ضلعه a و h طول الارتفاع [SO]

(1) أحسب بدلالة a (و / أو h) الجداءات التالية

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} ; \overline{AO} \cdot \overline{AS} ; \overline{SB} \cdot \overline{SD}$$

(2) أحسب V حجم الهرم

(3) كيف يمكن اختيار h حتى يكون (SB) و (SD)

متعامدين ؟ ماهي قيمة V عندئذ ؟

$$\text{تعطى النقط } A\left(\frac{7}{2}; \frac{15}{2}; -\frac{3}{2}\right) , B\left(2; -10; \frac{1}{2}\right)$$

$$C\left(-2; -\frac{5}{2}; -15\right) , D\left(-\frac{25}{2}; 0; -1\right)$$

- بين أن رباعي الوجوه ABCD منتظم ثم أحسب حجمه .

7 a عدد حقيقي موجب تماما ، OABC رباعي

أوجه حيث OAB ، OAC ، OBC مثلثا قائمة في O

و $OA = OB = OC = a$ ، I نقطة تقاطع الارتفاع

المرسوم من C في المثلث ABC مع (AB) ، H نقطة

تقاطع الارتفاع المرسوم من O في المثلث OIC مع (IC)

و D النقطة من الفضاء حيث $\overline{HO} = \overline{OD}$

الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس

$$\left(O; \frac{1}{2}\overline{OA}; \frac{1}{2}\overline{OB}; \frac{1}{2}\overline{OC}\right)$$

(1) بين أن احداثيات H هي $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$

(2) بين أن رباعي الوجوه ABCD منتظم

(3) W مركز الكرة الداخلية لرباعي الوجوه ABCD

بين أن $W \in (OH)$ ثم أحسب احداثيات W.

8 نعتبر النقط $A(-1;1;2)$ ، $C(2;0;3)$ و $(0;1;0)$

1. أحسب الجداءات السلمية: $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$ ، $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ، $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$

2. عين قيمة مقربة إلى 0.1 درجة لقياس كل زاوية من

الزوايا التالية: $\widehat{ACB}$ ، $\widehat{CBA}$ ، $\widehat{BAC}$.

9 في المكعب ABCDEFGH عين الزاوية $\widehat{AOH}$

المعرفة بالقطرين $[AG]$ ، $[BH]$

تكن I، J و K منتصفات القطع $[AB]$ ، $[CG]$ و $[EH]$

عين الزاوية $\widehat{KIJ}$ ماذا نستنتج؟

10 في المكعب ABCDEFGH نعتبر النقط I، J و K

منتصفات القطع $[AB]$ ، $[BF]$ و $[DH]$ على الترتيب.

1. هل المثلث IJK قائم؟

2. ماذا يميز سطح الكرة ذات القطر $[JI]$ بالنسبة للمكعب؟

11 ABCDS هرم قاعدته مربع ورأسه S أحرفه لها

نفس الطول a.

1. أحسب بدلالة a الجداء السلمي $\overline{GA} \cdot \overline{GC}$

و $\overline{GB} \cdot \overline{GC}$ استنتج $\overline{GS} \cdot \overline{GC}$.

2. أثبت المثلث AKC بعد حساب GC، يمكن استعمال:

$$\cos(\widehat{KAC}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

معادلة الديكارتية لمستوى

12 في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

$$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$$

- عين احداثيات أشعة ناظمية لكل من المستويات

$$(P): x + y - z = 0 \quad (P'): x - 2y = 0$$

$$(R): \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}z + 3 = 0 \quad (R'): 3y - z = 0$$

13 أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل

$A(1; -4; 3)$ و $u(1; 0; -2)$ شعاع ناظمي له

14 أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي

$$-x + 2y + z - 3 = 0$$

ويشمل النقطة $A(-1; 2; -3)$.

15 من بين المستويات التالية، أذكر المتوازية والمتعامدة

$$(P): -x + 2y + z - 3 = 0 \quad (P'): x - 2y - z = 0$$

$$(R): x - 2y + z + 3 = 0$$

$$(R'): 2x + 3y - 4z + 2 = 0$$

16 نعتبر المستوي (P) الذي معادلته الديكارتية

$$-5x + y - z - 6 = 0$$

- بين أن النقطة $B(-1; 1; 0)$ هي المسقط العمودي

لنقطة A على (P).

17 نعتبر النقط $A(-1; 1; 1)$ ، $B(0; 0; -1)$

و $C(3; -2; 1)$

(1) بين أن النقط A، B و C تعين مستويا

(2) عين شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

(3) أكتب معادلة ديكارتية لـ (ABC)

18 (1) أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة التي قطرها

[AB] حيث $A(7; 2; -2)$ و $B(-3; 0; -4)$

(2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي مماس (S) في A.

19 (1) عين W مركز (S) سطح الكرة الذي معادلته

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 15 = 0$$

(2) أحسب بعد النقطة W عن المستوي ذي المعادلة

$$4x - 3z - 6 = 0$$

(3) هل يقطع (P) السطح (S) في حالة الإيجاب، ما

طبيعة تقاطعهما؟

20 تعطى النقط $A(-1; 2; -1)$ ، $B(-6; 1; 1)$

و $C(4; -3; 3)$ و $D(-1; -5; -1)$

(1) عين احداثيات شعاع ناظمي $\vec{n}$ للمستوي (BCD)

استنتج معادلة ديكارتية لـ (BCD)

(2) عين احداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A

على (BCD).

(3) أحسب الجداء السلمي $\overline{BH} \cdot \overline{CD}$

(4) نسمي ارتفاع رباعي وجوه كل مستقيم يشمل أحد

الرؤوس و عمودي على الوجه المقابل. هل ارتفاعات

رباعي الوجوه ABCD تتقاطع في نقطة واحدة؟

(5) نعرف النقط $I(1; 0; 0)$ ، $J(0; 1; 0)$

و $K(0; 0; 1)$. هل ارتفاعات OTJK تتلاقى في

بكالوريا

نقطة واحدة؟

21 نعتبر النقط $A(1; 2; -2)$ ، $B(2; 3; -2)$ ،

$D(0; 3; -2)$ و $E(1; 2; -2 + \sqrt{2})$

1. تحقق أن: $AB = AD = AE$ و أن المستقيمات

(AB) ، (AD) و (AE) متعامدة متثنى متثنى .

2. عين إحداثيات النقط C ، F ، G و H حتى يكون

$ABCDEFGH$ مكعبا .

22 في مستو (P) نعتبر الدائرة (C) التي قطرها $[AB]$

S نقطة من (D) المستقيم العمودي على (P) في A ،

لتكن M نقطة من (C) تختلف عن A وعن B .

1. بين أن المستقيم (BM) عمودي على المستوي (SAM)

2. استنتج طبيعة المثلث BMS وعين تقاطع سطحي

الكرتين اللتين قطريهما $[AB]$ و $[SB]$.

3. نسمي H تقاطع الارتفاع المرسوم من A في المثلث

AMS مع (MS) بين أن الشعاع $\overrightarrow{AH}$ عمودي على

المستوي (BMS) .

23 تعطي النقط $A(1, -1, 0)$ ، $B(2, 3, -4)$ و

$C(-3, 0, 1)$ والشعاع $\vec{n}(8, 15, 17)$.

1. تحقق أن النقط A ، B ، C ليست في استقامية .

2. أحسب $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}$ و $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}$ استنتج معادلة ديكارتية

للمستوي (ABC) .

3. عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي

المستوي (ABC) و يمر من النقطة $D(-2, 2, -1)$

24 نعتبر النقط $A(-1, 2, 0)$ ، $B(-3, 4, 2)$

و $C(1, -2, -1)$

1. بين أن: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا .

2. بين أن شعاعاً $\vec{r}(a, b, c)$ يكون ناظميا للمستوي

(ABC) إذا و فقط إذا كان:
$$\begin{cases} -2a + 2b + 2c = 0 \\ 2a - 4b - c = 0 \end{cases}$$

3. استنتج شعاعاً ناظميا للمستوي (ABC) بمركبات

صحيحة ثم أكتب معادلة للمستوي (ABC) .

بعد نقطة عن مستو - الأشعة الناظمية

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته

$$3x - y + 4z + 1 = 0$$

أحسب بعد النقطة $A(-1; 2; -1)$ عن (P)

26 نعتبر النقط $A(1; 0; 1)$ ، $B(3; -2; 0)$

و $C(2; 4; -5)$ و $D(3; 5; 3)$.

1. عين شعاعاً ناظميا للمستوي (ABC)

2. أحسب بعد D عن (ABC) .

27 أحسب بعد النقطة O مبدأ المعلم عن المستوي (P)

حيث $2x - 3y + 6z - 7 = 0$ هي معادلة لـ (P) .

28 نعتبر المستوي (P) الذي معادلته: $2x - y - 1 = 0$ و

النقطة $M(3, 0, 2)$.

1. عين بعد M عن (P) .

2. استنتج بعد M عن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = 2x - 1$

في المستوي (xoy) ، (يمكن الاستعانة بشكل هندسي)

29 نعتبر النقط $A(1, 0, -1)$ ، $B(2, 2, 3)$ ،

$C(3, 1, -2)$ و $D(-4, 2, 1)$

1. اثبت أن المثلث ABC قائم ثم أحسب مساحته .

2. أ) بين أن الشعاع $\vec{n}(2, -3, 1)$ ناظمي للمستوي (ABC)

ب) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3. عين بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ، ثم أحسب

حجم رباعي الوجوه $DABC$.

30 نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بالمعادلتين:

$$2x + y - z = 0 \quad \text{و} \quad x - y + 2z = 0$$

1. تحقق أن $A(1, 0, -3)$ متساوية البعد عن (P) و (Q)

2. عين مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية البعد عن

(P) و (Q) .

مجموعات النقط

31 $ABCD$ رباعي وجوه .

1. بين أن المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان إذا و فقط

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

2. استنتج أنه إذا كان (AB) عموديا على (CD) و (BC)

عموديا على (AD) فإنه يكون (BD) عموديا على (AC) .

3. نفرض أن الرباعي $ABCD$ منتظم .

أ) ماذا يمكن القول عن أحرفه المتقابلة ؟

ب) بين أنه من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

ج) عين (E) مجموعة النقط M حيث

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

32 A، B، C ثلاث نقط من الفضاء حيث ABC مثلث قائم في C و متساوي الساقين (P) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق: $\|3\overline{MA} + \overline{MB}\| = 2\|\overline{MB} + \overline{MC}\|$ تحقق أن (P) مستو عمودي على المستوي (ABC) يطلب تعيين تقاطعه معه.

33 نعتبر المستوي (P) و O نقطة منه لنكن A نقطة لا تنتمي إلى (P) بكل مستقيم (D) يمر من O و محتوياً في (P) نرفق M المسقط العمودي لـ A على (D).

1. ماهي مجموعة النقط M لما يأخذ (D) كل الوضعيات الممكنة؟

2. (يمكن الاستعانة ببرمجة)

34 ABCD رباعي وجوه منتظم، بين أن (P) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق:

$$(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}) \cdot (\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC} - \overline{MD}) = 0$$

هي مستو مواز للمستقيمين (AB) و (CD) و يمر من G مركز نقل الرباعي ABCD

• عين تقاطعات (P) مع وجوه الرباعي (أثر (P))

المرجع ، التمييز المرجحي

35 G مرجح الجملة $\{(A;a), (B;b)\}$

G' مرجح الجملة $\left\{\left(A;\frac{1}{a}\right), \left(B;\frac{1}{b}\right)\right\}$

حيث $(A \neq B)$ ، $a \neq 0$ ، $a+b \neq 0$ و $b \neq 0$

نضع I منتصف [AB]

(1) برر وجود النقطة G'

(2) بين أن I منتصف [GG']

(3) أحسب طول GG' بدلالة طول AB

(4) ماذا يحقق العدان a و b حتى يكون $GG' > AB$ ؟

36 نعتبر المثلث ABC القائم في A و المتساوي الساقين ($AB = AC = a$) و m وسيط حقيقي

(1) ما هو الشرط اللازم و الكافي حتى تقبل الجملة

$\{(A;-1); (B;2); (C;m)\}$ مرجحاً G_m ؟

(2) أنشئ G_0 و G_2 ، تحقق أن $G_0 G_1 = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$

(3) عين وأنشئ المجموعة (Γ_1) مجموعة النقط M حيث $\{M \in (P) / \|\overline{-MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC}\| = \|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\|\}$

(4) عين وأنشئ المجموعة (Γ_2) مجموعة النقط M حيث $\{M \in (P) / \|\overline{-MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC}\| = AB\}$

(5) نفس السؤال (Γ_3)

$\{M \in (P) / \|\overline{-MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC}\| = \|2\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC}\|\}$ (P) هو المستوي

37 نعتبر النقط A، B، C و D من الفضاء و G

مرجح الجملة $\{(A;a); (B;b); (C;c); (D;d)\}$ حيث $a+b+c+d \neq 0$ و a غير معدوم

ما هو مرجح الجملة

$\{(G;-a-b-c-d); (B;b); (C;c); (D;d)\}$ ؟

38 في رباعي الوجوه ABCD نسمي منتصف [AB] و K منتصف [CD].

1. عين النقطتين J و L حيث: $\overline{BJ} = \frac{1}{4}\overline{BC}$

$$\overline{AL} = \frac{1}{4}\overline{AD} \text{ و}$$

2. باستعمال النقطة G مرجح الجملة

$\{(A,3); (B,3); (C,1); (D,1)\}$ بين أن المستقيمين

(JL) و (IK) متقاطعان.

39 ABCD رباعي من المستوي ، I منتصف [AC]

J منتصف [BD] . K نقطة حيث $\overline{KA} = -2\overline{KB}$

L نقطة حيث $\overline{LC} = -2\overline{LD}$ ، M منتصف [LK]

(1) G مرجح الجملة $\{(A;1); (B;2); (C;1); (D;2)\}$

بين أن G ينتمي الى المستقيمين (KL) و (IJ) .

(2) بين أن G منطبقة على M و أن M ، J و I على

استقامة واحدة ثم عين وضعية M على (IJ)

(3) عين كل النقط على شكل متناسب .

40 A ، B و C ثلاث نقط من الفضاء

(1) أنشئ G مرجح الجملة $\{(B;-1); (C;2)\}$

و F مرجح الجملة $\{(A;-2); (B;2); (C;-4)\}$

(2) بين أن F مرجح جملة نقطتين مرفقتين بمعاملين يطلب

تحديدهما

(3) عين المجموعة

$$\zeta_1 = \left\{ M \in \zeta / \|\overline{MA} - 2\overline{MB} + 2\overline{MC}\| = \frac{1}{2}AG \right\}$$

تحقق أن A و G تنتميان إلى ζ_1

(4) عين المجموعة

$$\zeta_2 = \left\{ M \in \zeta / \|\overline{MA} + \overline{MG}\| = \|\overline{MA} - \overline{MF}\| \right\}$$

41 A, B, C و D أربع نقط من الفضاءي نعتبر :

I مرجح الجملة $\{(A,1), (B,-2), (C,-3)\}$

J مرجح الجملة $\{(A,1), (C,-3), (D,4)\}$

K مرجح الجملة $\{(A,1), (B,-2), (D,4)\}$

42 بين أن الشعاع $\overline{MA} - 2\overline{MB} - 3\overline{MC} + 4\overline{MD}$

مستقل عن النقطة M.

2. بين أن المستقيميات (DI), (JB), و (CK) متوازية.

42 ABCD رباعي وجوه، نرفق بكل نقطة M من

المستقيم (AD) تختلف عن A النقطة G مركز البعاد

المتساوية M.C.B.A.

• عين (F) مجموعة النقط G عندما تتحرك M على

(AD). (نستعمل المعلم $(A, \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$)

43 نعتبر النقط $A(1;-1;1)$, $B(2;0;1)$, و $C(-3;1;0)$

1. تحقق أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى المستوي

الذي معادلته $x - y - 6z + 4 = 0$

2. علل وجود ثلاثة أعداد حقيقية a, b و c حتى يكون D

مرجح الجملة $\{(A;a), (B;b), (C;c)\}$ عين الثلاثية

(a,b,c) .

3. هل النقطة D تنتمي إلى داخل المثلث ABC ؟ علل.

44 ABCDEFGH مكعب، O_1 و O_2 مركزا

المربعين ABCD و EFGH و I مركز ثقل المثلث

EBD، m عدد حقيقي و G_m مرجح الجملة

$\{(E;1), (B;1-m), (C;2m-1), (D;1-m)\}$

1. تحقق أن G_m موجود من أجل كل قيمة لـ m.

2. حدد وضعية النقطة G_1 .

3. تحقق أن: $G_0 = A$ ، استنتج أن النقط A، G و I في

استقامية.

4. بين أن : $\overline{AG_m} = m\overline{AO_2}$ ، استنتج مجموعة النقط

G_m عندما يمسح m مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

5. أ. بين أن النقط A، G_m ، E و O_1 تنتمي إلى نفس

المستوي.

ب. عين قيمة m التي يكون من أجلها G_m نقطة من

المستقيم (EI)

45 A, B و C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من

الفضاء ζ . H مركز المثلث ABC

(1) G مرجح الجملة $\{(A;1), (B;2), (C;1)\}$ ، بين أن

B، G و H على استقامة واحدة

(2) عين ζ_1 مجموعة النقط M حيث

$$\zeta_1 = \left\{ M \in \zeta / 3\|\overline{MA} + 2\overline{MB} + \overline{MC}\| = 4\|\overline{MA} + \overline{MA} + \overline{MC}\| \right\}$$

(3) لكل نقطة M من المستوي نرفق الشعاعين

$$\vec{u} = \overline{MA} + 2\overline{MB} + \overline{MC}$$

$$\vec{v} = \overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC} \text{ و}$$

(a) بين أن $\vec{v}$ مستقل عن M

(b) بين أن C تحقق $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

(c) عين ζ_2 مجموعة النقط M من ζ التي تحقق :

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$$

46 نعتبر مستقيما مزودا بمعلم $(O; \vec{i})$ ، A_0 ، B_0

نقطتان فاصلتاها (-4) و $(+3)$ على الترتيب

لكل عدد طبيعي n نضع A_{n+1} مرجح

$\{(A_n;1), (B_n;4)\}$ و B_{n+1} مرجح

$\{(A_n;3), (B_n;2)\}$.

(1) علم النقط A_0 ، B_0 ، A_1 و B_1

(2) a_n و b_n فاصلتا A_n ، B_n على الترتيب، عر عن

a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n .

(3) بين أن من أجل كل n طبيعي $3a_n + 4b_n = 0$

- استنتج أن $a_{n+1} = -\frac{2}{5}a_n$ و $b_{n+1} = -\frac{2}{5}b_n$

(4) أكتب a_n و b_n بدلالة n ثم بين أن نهايتي a_n و b_n .

لما ينزل N إلى الملائهية.

- ماذا يمكن أن نقول عن وضعيتي A_n ، B_n ؟

المعلم $(A; \overline{AB}; \overline{AD}; \overline{AI})$

1. ليكن G مركز ثقل المثلث IBK أحسب إحداثيات G .
2. تحقق أن G تنتمي إلى المستقيم (JD) .
3. نحقق أن $\overline{JD}$ عمودي على $\overline{BK}$ و $\overline{BI}$ ، استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (BIK)

48 A ، B ، C و D أربع نقط لا تنتمي إلى نفس

المستوي في الفضاء ، α عدد حقيقي .

1. بين أن: G_α مرجح الجملة موجود لأجل كل قيم α .
 $\{(A; \alpha - 1); (B; \alpha + 2); (C; 2\alpha + 3); (D; -4\alpha - 2)\}$
- ما هي مجموعة النقط لما يتغير α على $\mathbb{R}$ ؟

49 ABC مثلث قائم في A نسمي O منتصف [BC] و

 (φ) الدائرة الداخلية للمثلث ABC و I منتصف [AO] ،

بكل نقطة من المستوي نرفق النقطتين P و Q

حيث: $\overline{MP} = 2\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}$ و $\overline{MQ} = 2\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC}$

1. بين أن I مرجح الجملة $\{(A; 2); (B; 1); (C; 1)\}$.
2. بين أن P و Q هما صورتا M بتحويلين نقطيين يطلب تحديدهما.

3. نأخذ الآن M كنقطة من (φ)

- أ. عين مجموعة النقط P و Q عندما يتغير M على (φ) .
- ب. لتكن O' نظيرة O بالنسبة لـ A ، ماهي طبيعة قرياعي $OMQO'$ ؟

ج. بين أن القطعة [PQ] تحافظ على طول ثابت و تشمل O' .

50 ABCD رباعي وجوه نسمي على الترتيب I ، J و K

مراكز ثقل المثلثات ABC ، ABD ، ACD .

1. عين النقط I ، J و K على الشكل .
2. أ. M نقطة من الفضاء، عبر بدالة $\overline{MI}$ المجموع الشعاعي $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}$.
 ب. استنتج أن مرتبطان خطيا .
3. بين أن المستويين (BCD) و (IJK) متوازيان .
4. G مركز ثقل رباعي الوجوه ABCD ، بين أن المستقيمت (DI) ، (CJ) و (BK) تتلاقى في النقطة G ، هل G تنتمي إلى المستوي (IJK) ؟

51 نعتبر رباعي الوجوه OABC حيث OAB ، OAC

و OBC مثلثات قائمة في O و $OC=OB=OA=1$ و [CI] ، ارتفاع في المثلث ABC ، [OH] ارتفاع في المثلث OIC .

1. ما طبيعة المثلث ABC؟ أحسب الطول AB .
2. أثبت أن المستقيمان (OH) و (AB) متعامدان و أن H ملتقى الارتفاعات في المثلث ABC .
3. أرسم المثلث OCI بعد حساب الأطوال OI و CI (الوحدة هي طول OC) ، عين H .
4. أ. عين الطول OH في المثلث OCI .
 ب. أحسب V حجم رباعي الوجوه OABC ثم S مساحة ABC .

ج. أوجد علاقة بين S، V و OH ثم تحقق من النتيجة 4-أ.

5. نعتبر النقطة D المعرفة بالعلاقة $\overline{OD} = \overline{HO}$ ثمننسب الفضاء إلى المعلم $(O; \overline{OA}; \overline{OB}; \overline{OC})$ أ. بين أن إحداثيات النقطة H هي $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

ب. بين أن رباعي الوجوه ABCD منتظم .

ج. لتكن Ω مركز سطح الكرة الداخلية للرباعي ABCDبين أن Ω نقطة من المستقيم (OH) وأحسب إحداثياتها .

52 تُعطى الدائرة (T) التي مركزها O ونصف قطرها R

1. عين مجموعة النقط M من المستوي التي تكون

المماسات لـ (T) و تشمل M متعامدة .

2. في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر القطع المكافئ (P) ذاالمعادلة: $y = x^2$ أ. أكتب معادلة للمماس (T_a) لـ (P) في نقطة A

فاصلتها a ، (a عدد حقيقي غير معدوم)

ب. ماهو معامل توجيه مستقيم عمودي على (T_a) ؟استنتج أن مماسا لـ (P) عمودي على (T_a) هو مماس فيالنقطة A' ذات الفاصلة $(-\frac{1}{4a})$.ج. عين معادلة للمماس لـ (P) في A' .

د. استنتج مجموعة النقط M من المستوي حيث

المماسات لـ (P) التي تشمل M متعامدة .

نختار المعلم $(A; \overline{AB}; \overline{AD}; \overline{AE})$ ، نسمي I و J

منتصفات [EF] و [FG] على الترتيب

L مرجح الجملة $\{(A;1), (B;3)\}$ و (D) المستوي

الذي معادلته $4x - 4y + 3z - 3 = 0$

في كل سؤال جواب واحد أو أكثر صحيح

(1) إحدائيات L هي:

$$\left(\frac{2}{3}; 0; 0\right) (c) \quad \left(\frac{3}{4}; 0; 0\right) (b) \quad \left(\frac{1}{4}; 0; 0\right) (a)$$

(2) المستوي (P) هو المستوي

$$(GFA) (c) , (LEJ) (b) , (GLE) (a)$$

(3) المستوي الذي يوازي (P) و يشمل I يقطع المستقيم

(FB) في M التي إحدائياتها :

$$\left(1; 0; \frac{1}{3}\right) (c) \quad \left(1; 0; \frac{1}{5}\right) (b) \quad \left(1; 0; \frac{1}{4}\right) (a)$$

(4) المستقيمات :

(a) (EL) و (FB) يتقاطعان في N نظيرة M بالنسبة لـ B

(b) (EL) و (IM) متوازيان

(c) (EL) و (IM) يتقاطعان

(5) حجم رباعي الوجوه FIJM هو

$$\frac{1}{36} (a) \quad \frac{1}{48} (b) \quad \frac{1}{24} (c)$$

نعتبر النقط $A(3; 1; 3)$ ، $B(-6; 2; 1)$

(P) المستوي : $x + 2y + 2z = 5$

في كل سؤال جواب واحد فقط صحيح

(1) مجموعة النقط M من الفضاء حيث

$$\|4\overline{MA} - \overline{MG}\| = 2$$
 هي

(a) مستوي من الفضاء

(b) سطح كرة

(c) مجموعة خالية

(2) إحدائيات H المسقط العمودي لـ A على P هي

$$\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right) (c) \quad \left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right) (b) \quad \left(\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) (a)$$

(3) سطح الكرة التي مركزها B و نصف قطرها 1

(a) يقطع (P) وفق دائرة

(b) يمس (P)

(c) لا يقطع (P)

صحيح أم خاطئ ، برّر جوابك.

55 نعتبر النقط $A(3; -2; 2)$ ، $B(6; 1; 5)$ ،

$C(6; -2; -1)$ و $D(0; 4; -1)$

1. المثلث ABC قائم .

2. المستوي (P) الذي معادلته $x+y+z-3=0$ عمودي

على المستقيم (AB) و يشمل A .

3. معادلة المستوي (P') العمودي على (AC) والذي

يشمل A هي : $x+z-5=0$.

4. $\vec{u}(1; -2; 1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) تقاطع (P)

و (P') .

5. المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .

6. حجم رباعي الوجوه ABCD هو 81 وحدة حجوم .

7. قياس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{3\pi}{4}$ راديان .

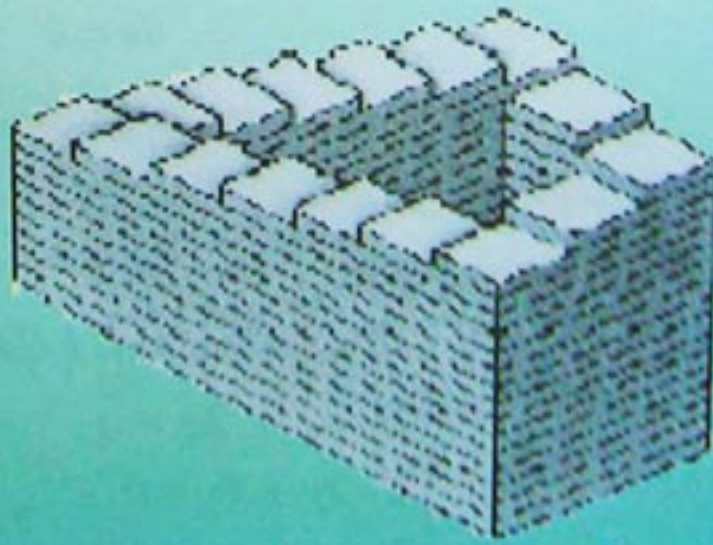
8. مساحة المثلث BDC هي 21 وحدة مساحة .

9. بعد A عن المستوي (BDC) يساوي 3 .

الكفاءات المستهدفة

- ◆ استعمال التمثيلات الوسيطة لحل مسائل الاستقامية ، التلاقي ، انتماء أربع نقط إلى نفس مستو.
- ◆ الانتقال من جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم أو معادلة ديكارتية لمستوي إلى تمثيل وسيطي و العكس .
- ◆ تحديد الوضع النسبي لمستويين ، لمستقيم ومستوي ، لمستقيمين .
- ◆ تعيين تقاطع مستويين ، لمستقيم ومستوي ، لمستقيمين .

أنظر جيدا و تخيل نفسك أنك تصعد على هذا السلم ...
هل أنت فعلا تصعد ! ؟



نشرح في هذه المرحلة طريقة غوس (GAUSS) لحل جملة معادلات خطية من خلال هذا المثال .
نعتبر الجملة (S) حيث

$$(S): \begin{cases} a - 2b + 2c - 2d + e = 1 & (L_1) \\ 2a - b + c - d - e = 2 & (L_2) \\ a - b + 2c - d + e = 4 & (L_3) \end{cases}$$

المرحلة الأولى :

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \quad : \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

نحصل على (S₁) :

$$(S_1): \begin{cases} a + 2b + 2c - 2d + e = 1 \\ 3b - 3c + 3d - 3e = 0 \\ b + d = 3 \end{cases}$$

المرحلة الثانية :

$$L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2$$

نغير ترتيب المجاهل و نقوم بالعملية

نحصل على (S₂) :

$$(S_2): \begin{cases} a + 2c - 2b - 2d + e = 1 \\ c - b - d + e = 0 \\ b + d = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2c - 2b - 2d + e = 1 \\ c - b - d + e = 0 \\ b + d + 0e = 3 \\ 0d + 0e = 0 \\ 0e = 0 \end{cases}$$

هذه الجملة مثلثية

المعادلتان الأخيرتان محققتان من أجل كل قيم d و e .

نختار $d = k$ و $e = k'$ مثلاً فنحصل على حلول الجملة و هي الخماسيات (a ; b ; c ; d ; e) حيث

$$a = 1 + k' , \quad b = 3 - k , \quad c = 3 - k' , \quad d = k , \quad e = k'$$

تطبيق : باستعمال طريقة (GAUSS) حل الجملة التالية :

$$(S): \begin{cases} 2x + 3y - 2z = a \\ x - 2y + 3z = b \\ 4x - y + 4z = c \end{cases}$$

حيث a , b , c أعداد حقيقية معطاة .

المربعات السحرية

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

مربع سحري ذو 16 خانة

تحتوي على كل سطر ، على كل عمود على كل قطر المجموع هو 34

توجد في القرن 20 وجدت المربعات السحرية تطبيقات عديدة متنوعة

في مجالات مختلفة (الإحصاء ، نظرية الإعلام ، استعمالات الزمن ...)

تريد تعيين المربعات السحرية بتسع خانات بالأرقام من 1 إلى 9 . كل رقم يستعمل مرة واحدة و واحدة فقط .

(a) مجموع الأرقام من 1 إلى 9 هو 45

لماذا يكون مجموع كل سطر وكل عمود وكل قطر هو 15 ؟

(b) نفرض أننا وجدنا مربعا سحريا ذا 9 خانات ، ما هي المربعات السبعة الأخرى التي نحصل عليها

بالدوران و التناظر ؟

(c) لماذا تحوي الخانة المركزية (تقاطع القطرين) الرقم 5 في كل هذه المربعات ؟

(d) عين كل هذه المربعات .

نشاط ثالث

عين كثيرات الحدود من الدرجة 4 الذي منحنياتها في المعلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$ ، يشمل النقط

$O(0;0)$ ، $A\left(1; -\frac{13}{2}\right)$ ، $B(2; -4)$ و تقبل في النقطتين A و B مماسا شعاع توجيهه $\vec{i}$

نشاط رابع

نعتبر الجملة التالية

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

حل الجملة ثم فسّر النتيجة هندسيا

المستقيـمات في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس . (D) مستقيم من الفضاء يشمل النقطة $A(x_A; y_A; z_A)$ و $\vec{u}(a; b; c)$ شعاع ناظمي له .

$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ حيث t عدد حقيقي إذا وجد عدد حقيقي t حيث $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ نقطة من (D) إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي t حيث $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

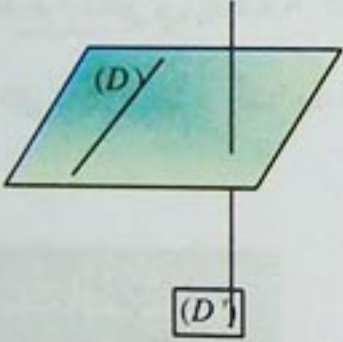
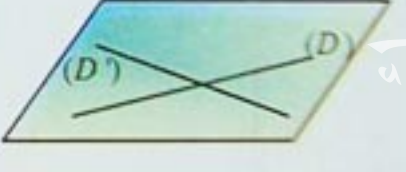
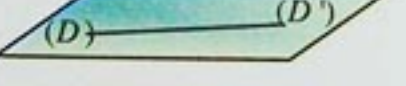
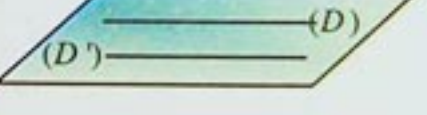
$$t \in \mathbb{R} \text{ مع } \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \text{ أو } t \in \mathbb{R} \text{ مع } \begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases}$$

وهذا يعني باستعمال الإحداثيات الديكارتية نسمي الجملة السابقة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .

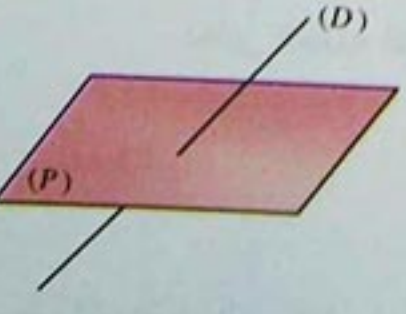
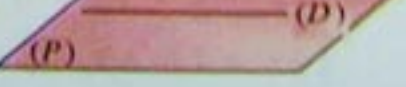
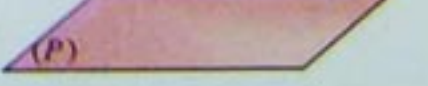
تقاطع المستقيـمات و المستويـات

(P) و (P') مستويان ، $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ ناظميان لهما على الترتيب . (D) و (D') مستقيمان موجهان بالشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ على الترتيب

تقاطع مستقيمين : يمكن للمستقيمين (D) و (D') أن يكونا

من مستويين مختلفين	من نفس المستوي		متقاطعين
	متوازيين		
	منطبقين	متوازيين و مختلفين	
			
التقاطع خال	التقاطع مستقيم	التقاطع خال	التقاطع نقطة

تقاطع مستقيم و مستوي : نلخص الوضعيات فيما يلي

(D) يقطع (P)	(D) يوازي (P)	
	(D) محتو في (P)	(D) يوازي (P) "تقاطع خال"
		

تمرين محلولة 1:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

— أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث $A(2; 2; -3)$ و $B(1; -1; 0)$

— هل النقطة $C(1; 3; 2)$ تنتمي إلى المستقيم (AB) ؟

الحل: شعاع توجيه لـ (AB) هو $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ +3 \end{pmatrix}$ و بالتالي مع $t \in \mathbb{R}$ هذه الجملة هي التمثيل الوسيط

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = -3 + 3t \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 2 - t = 1 \\ 2 - 3t = 3 \\ -3 + 3t = 2 \end{cases} \quad \text{و منه } C \text{ لا تنتمي إلى } (AB)$$

تمرين محلولة 2:

نعتبر المستقيمات $d_3; d_2; d_1$ ممثلة وسيطيا على الترتيب

$$d_3: \begin{cases} x = -7 + 7t'' \\ y = -3t'' \\ z = 2t'' \end{cases} \quad t'' \in \mathbb{R}, \quad d_2: \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 4 + 3t' \\ z = 5 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}, \quad d_1: \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

— أدرس تقاطع d_1 و d_2 ثم d_1 و d_3

الحل: $\overrightarrow{u_1} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{u_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{u_3} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ أشعة توجيه لـ $d_3; d_2; d_1$ على الترتيب

نلاحظ أن $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي d_1 و d_2 غير متوازيين ، فهما إما متقاطعان أو لا ينتميان لنفس

المستوي . و عليه نحل الجملة نجد $\begin{cases} -2 + 5t = 1 - t' \\ -1 - t = 4 + 3t' \end{cases}$ نجد $\begin{cases} t = 1 \\ t' = -2 \end{cases}$

النقطة من d_1 من أجل $t = 1$ هي $(3; -2; 7)$ و النقطة من d_2 من أجل $t' = -2$ هي $(3; -2; 7)$

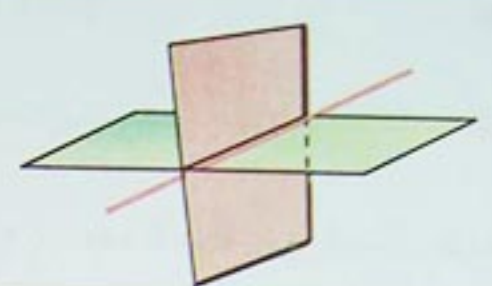
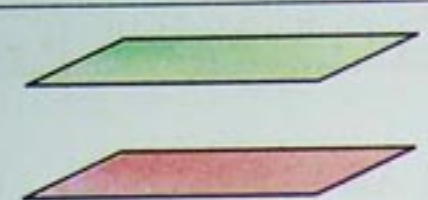
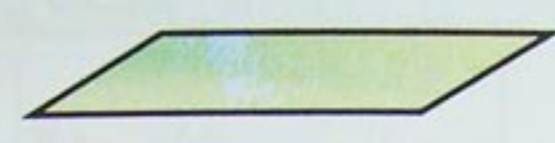
و بالتالي فالمستقيمان d_1 و d_2 يتقاطعان في $(3; -2; 7)$.

نلاحظ أن $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_3}$ غير مرتبطين خطيا نستخلص نفس الملاحظة

لحل الجملة $\begin{cases} -2 + 5t = -7 + 7t'' \\ -1 - t = -3t'' \end{cases}$ نجد $\begin{cases} t = -1 \\ t'' = 0 \end{cases}$ النقطة من d_1 من أجل $t = -1$ هي $(-7; 0; -1)$ و النقطة

من d_2 من أجل $t'' = 0$ هي $(-7; 0; 0)$ إذن المستقيمان d_1 و d_2 ليسا من نفس المستوي .

تقاطع مستويين : الوضعيات الممكنة هي :

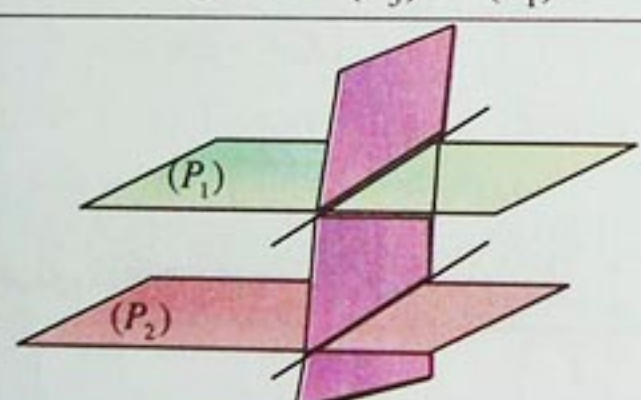
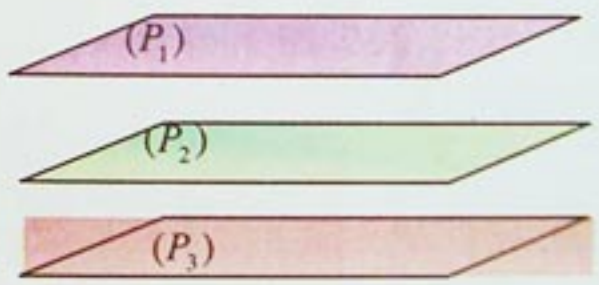
متوازيان		متقاطعان
تقاطع خالي	منطبقان	
		
التقاطع خال	التقاطع مستو	التقاطع مستقيم

خاصية : مستقيم في الفضاء معرف بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين

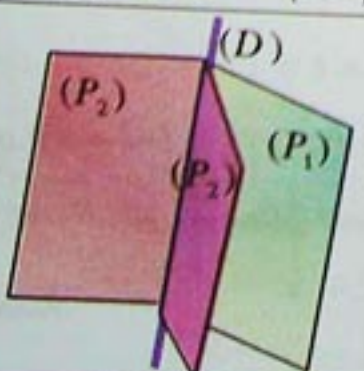
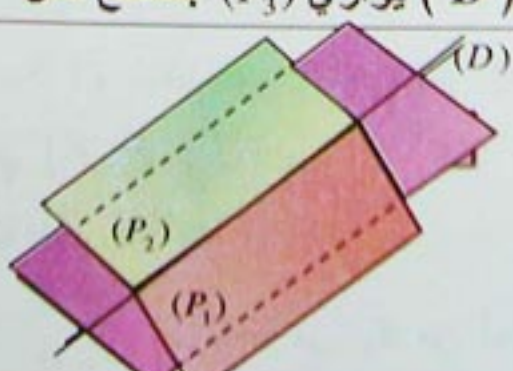
تقاطع ثلاث مستويات :

(P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات $\vec{n}_1$ ، $\vec{n}_2$ ، $\vec{n}_3$ أشعة ناظمية لها .

الوضعيات النسبية 1) (P_1) ، (P_2) متوازيان

(P_1) ، (P_3) متقاطعان	(P_1) ، (P_3) متوازيان
	
$(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \emptyset$	$(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \emptyset$

الوضعيات النسبية 1) (P_1) ، (P_2) يتقاطعان و تقاطعهما المستقيم (D)

(D) يوازي (P_3)	(D) لا يقطع (P_3)
(D) محتو في (P_3) 	(D) يوازي (P_3) بتقاطع خال 
$(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = (D)$	$(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \{I\}$

تمرين محلول 4 :

(P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات التي معادلات ديكارتية لها على الترتيب
 $4x - 2y - 4z - 5 = 0$ ، $-x + 4y + z - 3 = 0$ ، $2x - y - 2z - 1 = 0$
 أدرس الوضعية النسبية لـ
 (a) (P_1) ، (P_2) (b) (P_1) ، (P_3)

الحل: $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ، $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\vec{n}_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ أشعة ناظمية لـ (P_1) ، (P_2) ، (P_3) على الترتيب

(a) $\vec{n}_2$ و $\vec{n}_1$ غير مرتبطين خطيا ، إذن (P_1) و (P_2) ليسا متوازيين فهما يتقاطعان على المستقيم (D) .
 للحصول على تمثيله الوسيط نكتب مثلا x و y بدلالة z (وسيط)

$$t \in \mathbb{R}; \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{بعد الحساب نجد} \quad \begin{cases} 2x - y - 2z - 1 = 0 \\ -x + 4y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

(b) $\vec{n}_3 = 2\vec{n}_1$ أي $\vec{n}_3$ و $\vec{n}_1$ مرتبطان خطيا ، إذن (P_1) ، (P_3) متوازيان . نختار نقطة من (P_1) و لتكن $A(0; -1; 0)$ ، ليست نقطة من (P_3) و بالتالي تقاطع (P_1) ، (P_3) خال

تمرين محلول 5 :

نعتبر المستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3) بالمعادلات ديكارتية على الترتيب
 $2x - y + 2z - 1 = 0$ ، $2x + y + 3 = 0$ ، $4x + y + z + 10 = 0$
 أدرس تقاطع (P_1) ، (P_2) و (P_3)

الحل: $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\vec{n}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ أشعة ناظمية لـ (P_1) ، (P_2) ، (P_3) على الترتيب

ليست مرتبطة خطيا مثلي مثلي و بالتالي فالمستويات متقاطعة مثلي مثلي وفق مستقيم
 تقاطع (P_1) ، (P_2) ، ليكن (D) مستقيم تقاطعهما
 $\begin{cases} 4x + y + z + 10 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$

نضع $z = t$ لنحصل على تمثيلا وسيطيا لـ (D) و هو $t \in \mathbb{R}; \begin{cases} x = t \\ y = -3 - 2t \\ z = -7 - 2t \end{cases}$

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ (D) $(\vec{u} \cdot \vec{n}_3 = 0)$ إذن (D) يوازي (P_3) . $A(0; -3; -7)$ نقطة من (D)

$(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \emptyset$ و بالتالي $(A \notin (P_3))$

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر النقط التالية $A(1; 2; 3)$ ، $B(3; 2; 1)$ و $C(1; 3; 3)$

(1) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا ، أكتب معادلة ديكارتية له .

(2) نعتبر المستويين (P_1) ، (P_2) حيث

$$(P_1): x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$(P_2): x - 3y + 2z + 2 = 0$$

(a) بين أن (P_1) ، (P_2) يتقاطعان

و ليكن (Δ) تقاطعهما

(b) تحقق أن النقطة C تنتمي

إلى المستقيم (Δ)

(c) أثبت أن الشعاع $\vec{u}(2; 0; -1)$

شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

(d) استنتج تمثيلا وسيطيا لـ (Δ)

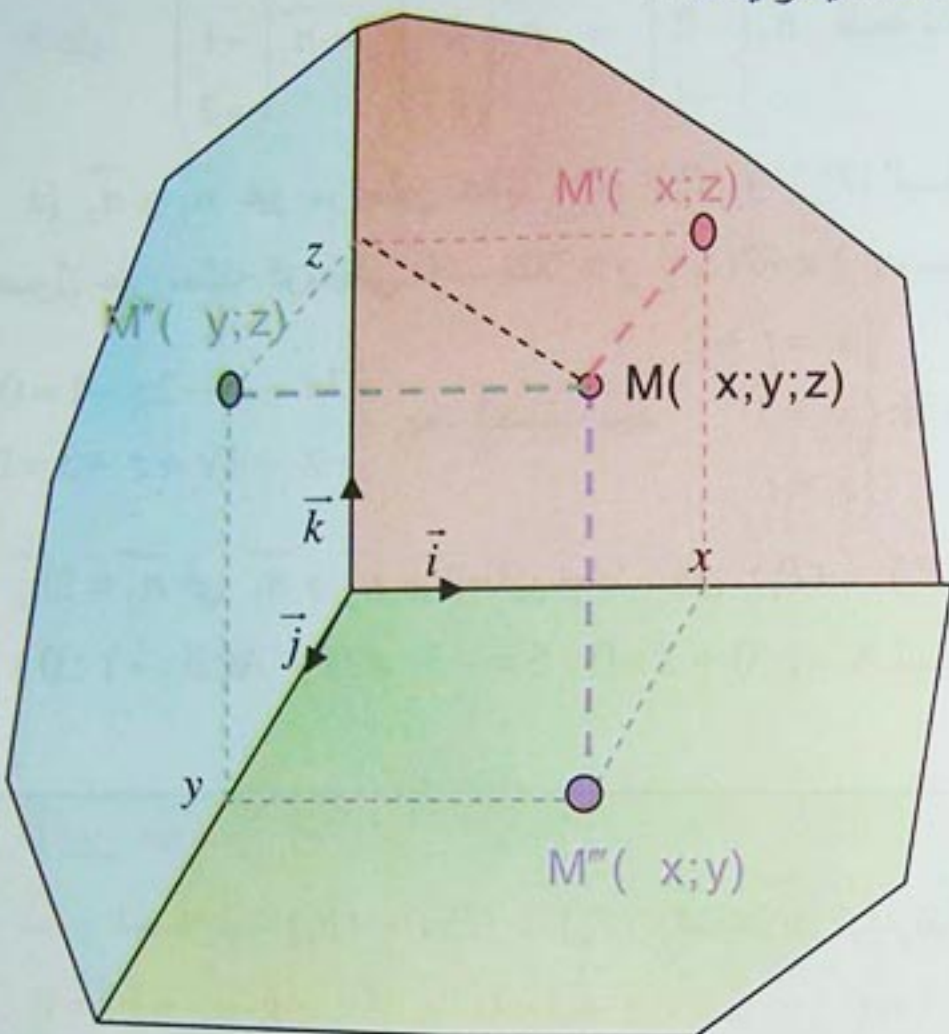
(2) لحساب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) الممثلة وسيطيا بالجملة

$$t \in \mathbb{R} \text{ مع } \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 3 \\ z = -k + 3 \end{cases}$$

نعتبر النقطة M ذات الوسيط k من المستقيم (Δ)

(a) عين قيمة k حتى يكون الشعاعان $\vec{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين

(b) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ)



الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر النقط التالية $A(3; 0; 10)$ ، $B(0; 0; 15)$ و $C(0; 20; 0)$

(1) (a) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

(b) بين أن (AB) يقطع حال مل محور الفواصل في نقطة $(9; 0; 0)$

(c) علل لماذا A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

(2) H نقطة تقاطع الارتفاع المرسوم من O في المثلث OBC مع المستقيم (BC)

(a) بين أن المستقيم (BC) عمودي على المستوي (OEH) .

- استنتج أن (EH) هو الارتفاع المرسوم من E في المثلث EBC .

(b) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (OEH)

(c) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

(d) بين أن الجملة :
$$t \in \mathbb{R} \text{ مع } \begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$$

تقبل حلا وحيدا . ماذا يمثل هذا الحل ؟

(e) أحسب البعد OH . استنتج أن $EH = 15$ و مساحة المثلث EBC .

(3) بحساب حجم رباعي الوجوه $OEBC$ بطريقتين ، استنتج بعد النقطة O عن المستوي (ABC)

- هل يمكن توقع هذه النتيجة من (c ، 2)

التمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
نعتبر النقط التالية $A(4; 0; -3)$ ، $B(2; 2; 2)$ ،
 $C(3; -3; -1)$ و $D(0; 0; -3)$.
(1) عين معادلة ديكارتية لمستوي محور $[AB]$ (ليكن (P) هذا المستوي)
(2) نقبل فيما يلي أن المستويين محوري القطعتين

$[BC]$ و $[DC]$ معرفان بالمعادلتين $2x-10y-6z-7=0$

و $3x-3y+2z-5=0$ على الترتيب .

- بين أن تقاطع هذه المستويات الثلاثة هو نقطة E يطلب تعيين إحداثياتها .

ب) بين أن النقط A ، B ، C ، D تقع على سطح كرة مركزها E يطلب تعيين نصف قطرها .

حل مختصر

(1) ليكن J منتصف $[AB]$ إذن $J(3; 1; -\frac{1}{2})$ ،

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P)

و بالتالي معادلة ديكارتية لـ (P) هي $4x-4y-10z-13=0$

(2) (P_1) يقطع (P_2) وفق مستقيم (D) تمثله الوسيط هو

$$\begin{cases} x = \frac{19}{11}t + 2 \\ z = -\frac{12}{11}t - \frac{1}{2} \end{cases} \text{ مع } (t \in \mathbb{R})$$

(D) يقطع (P) في نقطة E إحداثياتها $E(2; 0; \frac{1}{2})$

(2) ب) $ED = EC = EB = EA$

و بالتالي A ، B ، C و D تقع على سطح الكرة التي مركزها E

$$EA^2 = (4-2)^2 + 0^2 + (-3+\frac{1}{2})^2 = \frac{41}{4} \text{ لكن}$$

النقط A ، B ، C و D تقع على سطح الكرة التي مركزها E و نصف

$$\frac{\sqrt{41}}{2} \text{ قطرها}$$

تعاليق

الشعاع الناظمي لمستوي علمت معادلة

ديكارتية له هو $\vec{u}(a;b;c)$

نحصل على d باعتبار أن J نقطة من

(P)

هناك طريقة أخرى $MA^2 = MB^2$

لأن الشعاعان الناظميان لـ

(P_1) و (P_2) غير مرتبطين خطيا

حل الجملة مشكلة بمعادلتين المستويين

إحداثيات E تحقق حل الجملة

$$\begin{cases} x = \frac{19}{11}t + 2 \\ y = t \\ z = -\frac{12}{11}t - \frac{1}{2} \\ 4x - 4y - 10z - 13 = 0 \end{cases}$$

E تنتمي إلى مستويات هي محاور

لقطع مستقيمة

نعتبر المستويين المعرفين بمعادلتين ديكارتيتين كما يلي :

$$(R): 2x + y + 2z = 0 \quad , \quad (P): x + y = -1$$

(1) تحقق أن المستويين يتقاطعان وفق مستقيم (D) يشمل النقطة $A(1; -2; 0)$ و موجه بالشعاع

$$\vec{u}(-2; 2; 1)$$

(2) بين أن المستقيم (D) و المستوي (P') الذي معادلته $4x + 4y + z + 3 = 0$ يتقاطعان

(3) استنتج حل الجملة

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

توجيهات

- بعد كتابة جملة المعادلتين بـ x ، y و z عبر بدلالة z عن x و y (مثلاً) ثم ضع $z = t$ كوسيط لتحصل على التمثيل الوسيط لـ (D) الذي تظهر فيه مركبات $\vec{u}$ و إحداثيات A .
- عوض x ، y و z في معادلة (P') لتحصل على معادلة من الدرجة الأولى مجهولها t و بالتالي الحصول على نقطة تقاطع (D) مع (P')
- حل الجملة هو نقطة التقاطع بين (D) و (P') و هي النقطة الوحيدة التي تنتمي إلى المستويات الثلاثة .

1 أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل

$A(0; 0; 1)$ و $\vec{u}(1; 1; 1)$ شعاع توجيه له

1 أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D') الذي يشمل

$B(-1; 0; -1)$ و $\vec{v}(-1; 0; 2)$ شعاع توجيه له

2 عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث

$A(-2; 7; 1)$ و $B(3; 5; 2)$.

هل النقطتان $C(13; 1; 4)$ و $D(-12; 11; 1)$

تنتميان الى (AB) ؟

3 نعتبر النقط $A(1; -3; -2)$ ، $B(-5; 1; 3)$ و

$C(-1; 1; 1)$.

اكتب تمثيلا وسيطيا

(a) للمستقيم (AB)

(b) القطعة [BC]

(c) نصف المستقيم [AC]

4 نعتبر المستقيم (D) الذي تمثله الوسيط

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -t \\ z = -3 - 2t \end{cases} \text{ مع } t \text{ عدد حقيقي}$$

اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D') الذي يوازي (D) و

يشمل النقطة $A(-1; 2; -4)$.

5 عين طبيعة المجموعات التالية حيث تمثيلاتها

الوسيطية

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in [0; 1] \quad , \quad \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+$$

6 هل جملة المعادلتين

$$\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

و التمثيل الوسيط $\begin{cases} x = -1 + 9t \\ y = -2 - 4t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

يعرفان نفس المستقيم ؟

7 نفس السؤال السابق مع

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 - 5t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{و}$$

8 نعتبر المستوي (P) : $x - y + 2z = 2$ و النقطة

$A(4; -2; 1)$

1 عين $\vec{n}$ شعاعا ناظميا لـ (P)

2 اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل A و

شعاع توجيهه $\vec{n}$

3 استنتج احداثيات H المسقط العمودي لـ A على (P)

9 اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل

$A(-3; 5; -1)$ و العمودي على المستوي (P) الذي

معادلته : $x - 2y + 3z = 0$

$$\begin{cases} x = -4 - t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{عين تقاطع (D)}$$

ومع المستويات $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و $(O; \vec{j}; \vec{k})$ و $(O; \vec{i}; \vec{k})$

11 عين مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق

$$\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2 - 3t^2 \\ z = 2 + 2t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2 نفسا السؤال من أجل $t \in [-1; 3]$

12 نعتبر المستقيمين d و d' بالتمثيلين الوسيطيين

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1 بين أن المستقيمين من نفس المستوي

2 عين نقطة تقاطعهما

13 هل المستقيمان

$$d': \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

متوازيان ؟ متقاطعان ؟ ليسا من نفس المستوي ؟ برّر

14 أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل

A(0 ; -1 ; 2) و يوازي (d) حيث :

$$d : \begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 2k \\ z = 5 \end{cases} \in \mathbb{R}$$

15 بين أن (D) و (D') منطبقان حيث :

$$(D) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

$$(D') : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 5 - 6t' \\ z = 1 - 2t' \end{cases} t' \in \mathbb{R}$$

16 بين أن (D) و (D') من نفس المستوي حيث

$$(D) : \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

$$(D') : \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 1 + t' \end{cases} t' \in \mathbb{R}$$

17 نعتبر المستقيمين (D) و (D') حيث

$$(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

$$(D') : \begin{cases} x = 3 + 2m \\ y = m \\ z = -1 - 4m \end{cases} m \in \mathbb{R}$$

(1) بين أن المستقيمين ليسا من نفس المستوي

(2) عين مستقيما (D'') يوازي (D') و يقطع (D)

18 ليكن رباعي الوجوه ABCD و لتكن D' ، B' و C' نظائر A بالنسبة لمنتصفات القطع [BC] ، [CD] و [DB] على الترتيب

(1) تحقق أن (A; AB; AC; AD) معلم للفضاء

(2) عين تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمتين (BB') ، (CC') و (DD')

(3) بين أن هذه المستقيمتين تتقاطعان في نقطة واحدة J يطلب

تحديد احداثياتها

19 بين أن (D) و (D') مستقيمان منطبقان

$$(D) : \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = -4t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

$$(D') : \begin{cases} x = 9 + 5t' \\ y = -5 - t' \\ z = -8 - 4t' \end{cases} t' \in \mathbb{R}$$

20 بين أن (D) و (D') مستقيمان متوازيان

$$(D) : \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

$$(D') : \begin{cases} x = -2t' \\ y = 1 + 4t' \\ z = t' \end{cases} t' \in \mathbb{R}$$

21 بين أن (D) و (D') لا ينتميان لنفس المستوي

$$(D) : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

$$(D') : \begin{cases} x = -1 + t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = 5 + 3t' \end{cases} t' \in \mathbb{R}$$

22 بين أن (D) و (D') متقاطعان

$$(D) : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

$$(D') : \begin{cases} x = t' \\ y = 1 - t' \\ z = -1 + 4t' \end{cases} t' \in \mathbb{R}$$

المستويات في الفضاء

23 (1) عين تقاطع المستويين (P) و (Q) في

الحالات التالية :

$$(Q) : 3x + 3y + 3z - 12 = 0; (P) : x + y + z = 4 \quad (a)$$

$$(Q) : 3x + 3y + 3z + 12 = 0; (P) : x + y + z = 4 \quad (b)$$

$$(Q) : x + y + z = 0; (P) : 2x - y + z + 2 = 0 \quad (c)$$

$$(Q) : x - y + 2z = 5; (P) : -3x + 2y + z - 1 = 0 \quad (d)$$

24 تحقق أن المستقيمين (D) و (D') متقاطعان

$$(D): \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(D'): \begin{cases} x = 4 - 5t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

(2) أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) الذي يشمل (D)

و (D')

25 تحقق أن المستقيمين (D) و (D') متوازيان و أكتب

معادلة ديكرتية للمستوي الذي يشملهما .

$$(D): \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(D'): \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

26 عين في كل مرة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (D)

$$(P): -2x + y - z + 3 = 0$$

$$(D): \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(P): x + 3y - z + 1 = 0$$

$$(D): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(P): x + y - 2z + 2 = 0$$

$$(D): \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

27 نعتبر النقطتين A(3; 3; 0) ، W(1; 1; 1)

(1) أكتب معادلة لـ (S) سطح الكرة الذي مركزه W

ويشمل A .

(2) أكتب معادلة لـ (P) المستوي المماس لـ (S) في A

(3) لتكن النقط (C(0; 0; -3) ، B(-1; 2; -1)

و D(1; 2; -3)

(a) تحقق أن النقط B ، C و D ليست على استقامة واحدة

(b) أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (BCD)

(4) بين أن (BCD) و (P) متعامدان

(5) أكتب تمثيلا وسيطيا لتقاطع (P) و (BCD)

28 عين في الحالتين تقاطع المستويات الثلاثة

$$(1) (P): x + y + z = 4$$

$$(Q): y + \frac{1}{2}z = 3$$

$$(R): 3x + 2y = 6$$

$$(2) (P): x + y + z = 4$$

$$(Q): -x + y - z = 2$$

$$(R): 3x + 4y + 3z = 15$$

29 حل في $\mathbb{R}^3$ ثم أعط تفسيراً هندسياً للجملتين التاليتين

$$(1) \begin{cases} 2x - y - 7z + 26 = 0 \\ x + y - 2z + 7 = 0 \\ -x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 4x + 2y - z + 2 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ -x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

30 نعتبر النقط A(2; 1; 1) ، B(3; 0; 1)

C(0; 1; 5) ، D(-1; 0; 1) و E(6; 2; 3)

(1) تحقق أن النقط A ، B و C تعرف مستوي (ABC)

يطلب إعطاء معادلة ديكرتية له .

(2) عين التمثيل الوسيطى للمستقيم (DE)

(3) عين إحداثيات النقطة I تقاطع (DE) مع (ABC)

31 نعتبر النقطتين A(1; 1; 1) و B(-1; 1; 2) من

الفضاء و (P) المستوي الذي يشمل النقطة C(2; 4; 1)

و $\vec{n}(-1; -1; 5)$ شعاع ناظمي له .

32 نعتبر النقط A(1; 0; 2) ، B(3; 2; 4)

C(1; 4; 2) و D(5; 2; 4)

نعرف النقط I ، J و K كما يلي : I منتصف [AB] .

J منتصف [CD] و $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$

(1) عين احداثيات النقط I ، J و K ثم تحقق أن هذه النقط ليست على استقامة واحدة .

(2) تحقق أن $\vec{n}(-2;1;-1)$ ناظمي لـ (IJK) ثم أكتب معادلة ديكارتية لـ (IJK)

(3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (A) ثم تحقق أن (IJK) و (AD) يتقاطعان في نقطة L حيث $\overline{AL} = \frac{1}{4}\overline{AD}$

33 أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A شعاعا $\vec{u}$ ناظمي له

(1) $A(-1;2;0)$ و $\vec{u}(1;1;-1)$

(2) $A(0;0;2)$ و $\vec{u}(1;0;0)$

(3) $A(-1;-1;2)$ و $\vec{u}(-1;0;1)$

34 نعتبر النقطة $A(1;2;3)$ والشعاع $\vec{u}(1;2;-1)$ عين معادلة لمجموعة النقط M التي تحقق $\vec{u} \cdot \overline{AM} = 2$

- ما طبيعة هذه المجموعة ؟

35 المستوي (P) معرف بالمعادلة الديكارتية

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - z = 0$. عين معلما ديكارتيا للمستوي (P) .

36 (P) هو المستوي الذي معادلته $x + y - 2z + 3 = 0$ نعتبر النقطة $A(2;-3;1)$ والشعاعين $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(3;-3;0)$

بين أن $(A; \vec{u}; \vec{v})$ معلما متعامدا في المستوي (P) .

37 المستوي (P) يشمل النقط $A(1;-1;-1)$ ،

$B(0;1;1)$ و $C(-1;2;0)$

عين شعاعا ناظميا لـ (P)

(2) استنتج معادلة ديكارتية لـ (P)

38 (P) مجموعة النقط المعرفة بالتمثيل الوسيط

$$(P): \begin{cases} x = 1+t+2m \\ y = -2+3t \\ z = 1-m \end{cases} \quad t, m \in \mathbb{R}$$

نعتبر النقطة $A(1;-2;1)$ والشعاعين $\vec{u}(1;3;0)$ و $\vec{v}(2;0;-1)$

(1) بين أن (P) هو مستوي المعلم $(A; \vec{u}; \vec{v})$

(2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)

39 أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل

$A(1;-2;3)$ و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ شعاعا توجيه له .

40 (P) المجموعة المعرفة بـ :

$$(P): \begin{cases} x = 2-t+m \\ y = 1+3m \\ z = 1-t \end{cases} \quad t, m \in \mathbb{R}$$

بين أن (P) مستوي يطلب كتابة معادلة ديكارتية له

41 نعتبر المستوي (P) الذي معادلته

$$2x + y - 2z + 5 = 0$$

(1) عين شعاعا $\vec{n}$ ناظميا لـ (P)

(2) بين أن الشعاع $\vec{u}(1;0;1)$ شعاع توجيه لـ (P)

(3) عين أساسا متجانسا $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا مع $\vec{n}$ و $\vec{u}$ على الترتيب

42 أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل

$A(-3;1;2)$ و يوازي المستقيمين (D) و (D')

الذين تمثيلاهما الوسيطيان هما

$$\begin{cases} x = 2+t' \\ y = -5+t' \\ z = 4+t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R} , \quad \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 4+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

43 نعتبر المستقيمين

$$(D): \begin{cases} x = 5+2t' \\ y = 2t' \\ z = -5-t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R} , \quad (D'): \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = -3+2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

بين أنه يوجد مستوي (P) وحيد يشمل (D) و (D') ثم

أكتب معادلة ديكارتية لـ (P) .

تقاطعات المستويات

44 نعتبر المستوي (P) الذي معادلته

$$2x + y - z + 1 = 0$$

والمستوي (P') الذي معادلته $-x + 3y - 2z + 4 = 0$

(1) بين أن المستويين متقاطعان

(2) عين شعاع توجيه و نقطة من مستقيم تقاطعهما

45 نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $x + y - z = 0$

والمستوي (P') الذي معادلته $2x - y - z - 1 = 0$

عين شعاع توجيه لمستقيم تقاطعهما

46 نعتبر النقط $B(1; 0; 0)$ ، $A(0; 1; 1)$ ،

$D(0; 1; 2)$ و $C(-1; 2; 1)$

بين أن النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي ثم عين معادلة ديكارتية لهذا المستوي

47 نعتبر النقط $B(1; -6; -1)$ ، $A(-1; 2; 1)$ و

$C(2; 2; 2)$. بين أن النقط A ، B و C تعرف مستويا يطلب تحديد تقاطعه مع المستوي (P) الذي معادلته $x - 3y + z - 4 = 0$.

48 (1) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم d تقاطع المستويين

(P) و (P') اللذين معادلتهما $x + y + z = 0$

و $x - y + z - 4 = 0$

(2) عين معادلة ديكارتية للمستوي (P'') الذي يشمل

$A(1; 1; 2)$ و العمودي على d .

49 بين أن المستويات الثلاثة (P) ، (P') و (P'')

تشترك في نقطة وحيدة يطلب تعيينها

$(P) : 2x + 3y - z = -2$

$(P') : 5y - 4z = 1$

$(P'') : z = 1$

50 فسر الجملة هندسيا ثم حلها

$$\begin{cases} 4x + 6y - 12z = 5 \\ 6x + 9y - 18z = 8 \end{cases}$$

51 نعتبر الجملة التالية

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

(1) باعتبار أن المعادلتين الأوليتين هما معادلتا مستويين

(P) و (P') يتقاطعان في مستقيم (D) يشمل النقطة

$A(1; -2; 0)$ و موجه بـ $\vec{u}(-2; 2; 1)$

(2) تحقق أن (D) و المستوي (P'') الذي معادلته الثالثة

في الجملة يتقاطعان واستنتج أن الجملة تقبل حلا وحيدا

يطلب تعيينه .

52 نسمي (P) و (P') المستويين اللذين معادلتهما

$$3x + y - z = 0 \quad \text{و} \quad 2x - y + 5 = 0$$

بين أن المستويين يتقاطعان وفق مستقيم تمثيله الوسيط

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 5 \\ z = 5t + 5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

53 حل الجمل التالية و فسر النتائج هندسي

$$(1): \begin{cases} 4x + 2y + z = 4 \\ 4x - 2y + z = -2 \\ 4x - y = 0,5 \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} 5x + 3y + 4z = -1 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$(3): \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 7y + 4z = 10 \end{cases}$$

مسائل

54 نعرف في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة ، المعادلة

$$(E): z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0 \quad z \text{ ذات المجهول}$$

(1) تحقق أن 8 حل للمعادلة ، استنتج الحلين الآخرين

(2) $(o; \vec{u}; \vec{v})$ معلم متعامد و متجانس في المستوي الموجه

(الوحدة 1cm) . نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق

$$a = 2 - 2i\sqrt{3} \quad , \quad b = 2 + 2i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad c = 8 \text{ على}$$

الترتيب .

(a) أحسب طولية و عمدة لـ a و علم النقط A ، B و C

(b) أحسب العدد المركب $q = \frac{a-c}{b-c}$ و عين طويلته

و عمدة له . استنتج طبيعة المثلث ABC

(c) عين D مرجح الجملة $\{(A; |a|); (B; |b|); (C; |c|)\}$

علم D .

(d) عين (T) مجموعة النقط M حيث

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$$

أنشئ (T) .

55 نعتبر المكعب ABCDEFGH و الذي حرفه 1 .

a عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر النقطة M من نصف

$$\overline{AM} = \frac{1}{a} \overline{AE} \text{ المستقيم [AE] المعروف كما يلي}$$

(1) عين حجم رباعي الوجوه ABDM بدلالة a

(2) لتكن K مرجح الجملة $\{(M; a^2); (B; 1); (D; 1)\}$

(a) عبر عن $\overline{BK}$ بدلالة $\overline{BM}$ و $\overline{BD}$

(b) أحسب $\overline{BK} \cdot \overline{AM}$ و $\overline{BK} \cdot \overline{AD}$ ثم استنتج أن

$$\overline{BK} \cdot \overline{MB} = 0$$

(c) بين أن : $\overline{DK} \cdot \overline{MB} = 0$

(d) بين أن : K هو ملتقى ارتفاعات المثلث BDM

(3) أثبت المساويتين : $\overline{AK} \cdot \overline{MB} = 0$ و $\overline{AK} \cdot \overline{MD} = 0$

ماذا تستنتج ؟

(4) (a) بين أن المثلث BDM متساوي الساقين وأن مساحته

$$\frac{\sqrt{a^2 + 2}}{2a} \text{ وحدة مساحة}$$

(b) عين العدد a حتى تكون مساحة BDM تساوي 1

وحدة مساحة . أحسب الطول AK في هذه الحالة

56 الفضاء منسوب الى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر مجموعة النقط من الفضاء و التي نرمز لها بالرمز

(p_m) و احداثياتها $(x; y; z)$ تحقق

$$(3-m)x + 4y - (1+2m)z - 5 = 0 \text{ مع } m \text{ عدد}$$

حقيقي .

(1) بين أنه من أجل كل قيم m الحقيقية فإن (p_m) مستو

(2) عين نقطة و شعاع توجيه للمستقيم (D) تقاطع

(p_0) و (p_1)

(3) بين أن (D) محتواة في كل المستويات (p_m)

57 الفضاء منسوب الى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقط $A(3; -2; 2)$ ، $B(6; 1; 5)$

$C(6; -2; -1)$

(I) بين أن المثلث ABC قائم

(2) ليكن (P) المستوي الذي معادلته $x + y + z - 3 = 0$

بين أن (P) عمودي على المستقيم (AB) و يمر من النقطة A .

(3) ليكن (P') المستوي العمودي على المستقيم (AC)

و الذي يشمل A . أكتب معادلة ديكرتية لـ (P')

(4) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) مستقيم تقاطع (P)

و (P') .

(II) (1) لتكن D النقطة ذات الاحداثيات (0 و 4 و -1) ،

بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستقيم (ABC)

(2) أحسب حجم رباعي الوجوه ABDC

(3) بين أن قياس الزاوية $\widehat{BDA}$ هو $\frac{\pi}{4}$ راديان

(4) أ) أحسب مساحة المثلث BDC

ب) استنتج بعد النقطة A عن المستوي (BDC)

58 الفضاء منسوب الى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نريد تعيين المستويات التي تشمل المستقيم d المعروف

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2z - 3 = 0 \end{cases} \text{ بالجملة التالية بحيث تكون هذه}$$

المستويات تلمس سطح الكرة S التي مركزها $A(0; 4; 0)$

و نصف قطرها $\sqrt{5}$

(1) بين أن المستوي (P) الذي معادلته $x + 2z - 3 = 0$

لا يمس S .

(2) نعتبر المستويات (P_a) : $2x + y + 1 + a(x + 2z - 3) = 0$

لاحظ أن d محتواة في (P_a) من أجل كل قيم a الحقيقية

[باستعمال برمجية مناسبة عرّف A ، عرّف المتغير

لعددي a في مجال ، المستقيم d و المستويات (P_a)] ثم

عرّف مستقيم تقاطع (P_a) مع (XOY) ثم اختر النمط

TRACE و عاين أن (P_a) يشمل كل المستويات التي

تحو d عدا واحدا . مله ؟

انشئ دائرة تقاطع (P_a) مع S ثم خمن قيم a التي تعطي

المستويات (P_a) التي تلمس S

(3) أحسب بعد A عن (P_a) ثم عين قيم a حتى يكون

(P_a) مماسا لـ S

(1 ; -2 ; 0) نقطة S ،

(P) مستوي معادته $x + y - 3z + 4 = 0$

جواب واحد فقط صحيح

59 المستقيم (D) الذي يشمل S ويعامد (P) ذو

تمثيل وسيطي

$$(a): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = -3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(b): \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 1-3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(c): \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-2t \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(d): \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = -3-3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

60 إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع (P) مع (D) هي

$$(a) (-4; 0; 0) \quad (b) \left(\frac{6}{5}; -\frac{9}{5}; -\frac{3}{5}\right)$$

$$(c) \left(\frac{7}{9}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \quad (d) \left(\frac{8}{11}; -\frac{25}{11}; \frac{9}{11}\right)$$

61 بعد S من (P) هو :

$$(1) \frac{\sqrt{11}}{3} \quad (2) \frac{3}{\sqrt{11}} \quad (3) \frac{9}{\sqrt{11}} \quad (4) \frac{9}{11}$$

62 نعتبر سطح الكرة الذي مركزه S ونصف قطره 3 .

تقاطع السطح مع (P) هو :

(a) النقطة I(1 ; -5 ; 0)

(b) الدائرة التي مركزها H ونصف قطرها $3\sqrt{\frac{10}{11}}$

(c) الدائرة التي مركزها S ونصف قطرها 2

(d) الدائرة التي مركزها H ونصف قطرها $3\sqrt{\frac{10}{11}}$

63 (P) ، (Q) و (R) ثلاث مستويات من الفضاء .

(D) و (D') مستقيمان حيث تقاطع (D) مع (P)

مجموعة خالية

(1) إذا كان تقاطع (P) و (Q) غير خال وتقاطع (Q)

و (R) غير خال فإن تقاطع (P) و (Q) و (R)

غير خال .

(2) إذا كان تقاطع (P) و (Q) و (R) غير خال فإن

تقاطع (P) و (Q) هو تقاطع (Q) و (R)

(3) تقاطع (P) و (Q) هو تقاطع (Q) و (R) فإن

(P) و (Q) و (R) مستقيم .

(4) إذا كان تقاطع (D') و (P) غير خال فإن تقاطع

(D) و (D') غير خال .

(5) إذا كان تقاطع (D) و (D') غير خال فإن تقاطع

(D') و (P) غير خال

(6) إذا كان تقاطع (P) ، (Q) و (R) نقطة فإن تقاطع

(P) و (Q) مستقيم .

64 النقطة A(7 ; -2 ; 1) تنتمي الى المستقيم (d)

$$\begin{cases} x = 4+3t \\ y = 1-3t \\ z = 1-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(2) مجموعة النقط من الفضاء التي احداثياتها تحقق

$$2x - y + 3 = 0 \text{ هي مستقيم .}$$

(3) مجموعة النقط من الفضاء ذات التمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x = 1+3\cos t \\ y = -1+2\cos t \\ z = -1 \end{cases} \quad t \in [0; \pi]$$

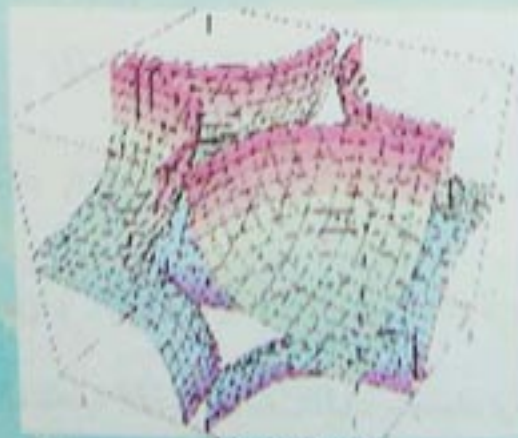
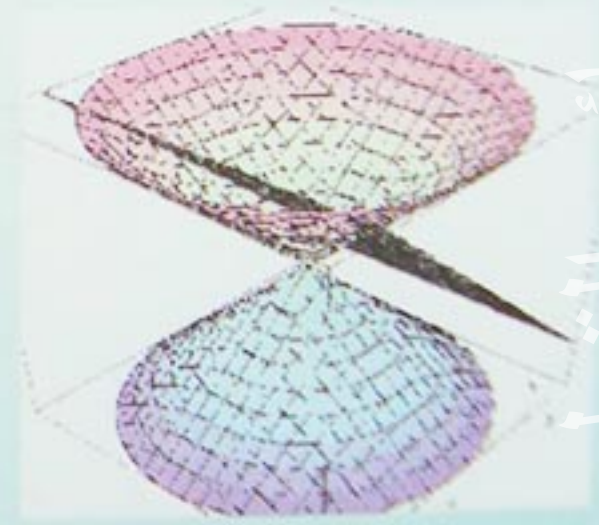
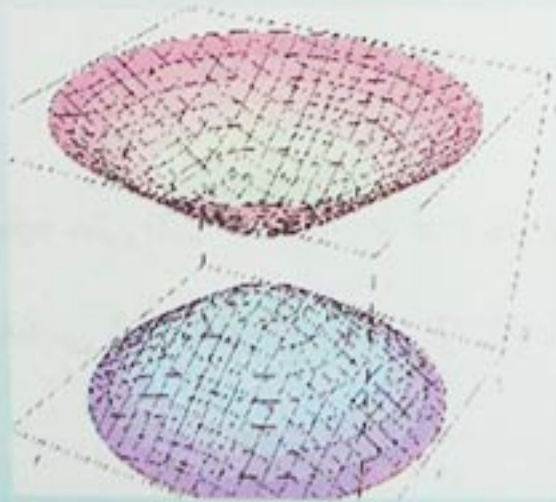
(4) نعتبر النقطة A(-1 ; 2 ; 1) والمستقيم (D) الذي

يشمل O و شعاع توجيهه $\vec{u}(-5; 3; -4)$

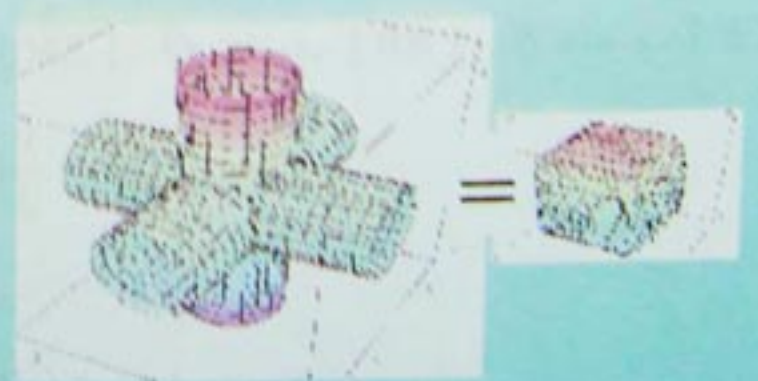
- يوجد مستقيم وحيد (Δ) يشمل A و عمودي على (Δ)

الكفاءات المستهدفة

- ◆ تعيين معادلة سطح أسطوانة دوراني أو سطح مخروط دوراني .
- ◆ تعيين مقاطع اسطوانية أو مخروطية .
- ◆ تمثيل مقاطع مجسم مكافئ (Paraboloid) .
- ◆ تمثيل مقاطع مجسم زائدي (Hyperboloid) .



$$|xyz|=2$$



نشاط أول

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر (S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ و التي تحقق $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 1 = 0$

(1) تحقق أن (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها A و نصف قطرها R .

(2) نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $mx + 2y - z + 1 = 0$ حيث m عدد حقيقي

- عين m حتى يكون (P) مستويا مماسا لـ (S) .

- أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل A و يعامد (P) (من أجل قيمة m المحصل عليها سابقا)

- استنتج نقطة التماس بين (P) و (S)

(3) أكتب معادلة دائرة التقاطع بين (S) و المستوي (P) الذي معادلته $z = 0$ في المعلم $(A; \vec{i}; \vec{j})$. للمستوي (p)

نشاط ثان

يتغير z إنتاج مصنع بتغير عدد العمال x و عدد ساعات العمل y وفق العلاقة

$$z = \frac{4x + 2}{x^2 + y^2 + 2}$$

(1) عين قيم k الحقيقية حتى تقبل المعادلة $z = k$ حولا حقيقية .

(2) استنتج القيمة العظمى التي يمكن أن يبلغها الإنتاج .

نشاط ثالث

$ABCDEFGH$ مكعب . p منتصف $[EH]$. Q منتصف $[AB]$ و R منتصف $[CE]$

$$(1) \text{ بين أن } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ و أن } \overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH})$$

(2) بين أن المستويين (PQR) و (ACH) متوازيان .

(3) بين أن مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (PQR) هو سداسي منتظم .

نشاط رابع

$ABCD$ رباعي وجوه . لتكن النقط I منتصف $[AD]$ ، J منتصف $[BC]$

و G مركز ثقل المثلث ABC .

- (1) عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ مرةً بدلالة $\overrightarrow{DG}$ و مرةً أخرى بدلالة الشعاع $(\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DJ})$
- (2) بين أن النقط D, G, I, J تنتمي إلى نفس المستوي .

نشاط خامس

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

نعتبر مجموعة النقط $M_t(x, y)$ حيث : $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ و $y = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

- (1) بين أن مجموعة النقط M_t لما يتغير t على $\mathbb{R}$ هي (H) إتحاد منحنين معادلتيهما

$$y = f(x) \text{ و } y = -f(x)$$

- (2) أدرس تغيرات f ثم أنشئ منحناها البياني (C)

- (3) استنتج تمثيلاً بيانياً لـ (H) .

نشاط سادس

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

باستعمال برمجية *Multimaths* أو برمجية هندسية أخرى

- 1- أنشئ مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق $z = f(x; y) = x^2 + y^2$

- 2- أنشئ المستوي الذي معادلته الديكارتية $z = 2$

- أكتب معادلة التقاطع في المستوي السابق

- 3- أنشئ المستوي الذي معادلته الديكارتية $x = 2$

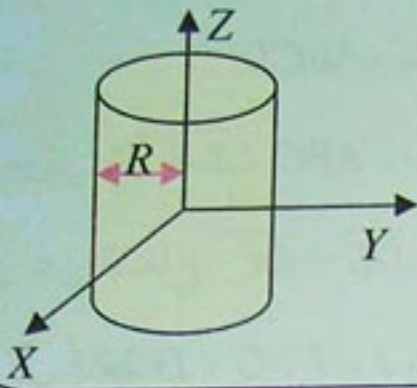
- أكتب معادلة التقاطع في المستوي السابق

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

1- تعريف : (C) الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $R (R > 0)$

من المستوي (XOY) .

السطح الأسطوانى الدوراني الذي محوره (OZ) و نصف قطره R هو مجموعة المستقيمت الموازية لـ (OZ) و التي تشمل نقطة من (C) كل مستقيم من هذه المستقيمت مولد لهذا السطح الأسطوانى



2- مبرهنة : السطح الأسطوانى الدوراني الذي محوره (OZ) و نصف قطره R هو مجموعة النقط

$M(x; y; z)$ حيث $x^2 + y^2 = R^2$ (السطح غير محدد) $x^2 + y^2 = R^2$ هي معادلة ديكارتية لـ (E)

برهان : $M(x; y; z)$ تنتمي إلى السطح الأسطوانى معناه m المسقط العمودي لـ M على (XOY) ينتمي إلى (C)

أي أن $x^2 + y^2 = R^2$

3- مقطع سطح أسطوانى دوراني محوره (OZ) :

(a) مقطع بمستوي يوازي (XOY) :

2- مبرهنة : Σ السطح الأسطوانى الدوراني الذي محوره (OZ) و نصف قطره R . مقطع Σ بالمستوي

(P) الذي معادلته $z = a$ هو الدائرة من المستوي (P) التي مركزها $O(0; 0; 0)$ و نصف قطرها R

برهان : $M(x; y; z)$ تنتمي إلى المقطع معناه M تنتمي إلى Σ و إلى (P) أي $x^2 + y^2 = R^2$ و $z = a$

و بالتالي فإن مقطع Σ بالمستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث $x^2 + y^2 = R^2$ أي الدائرة التي مركزها $(0; 0; a)$ و نصف قطرها R .

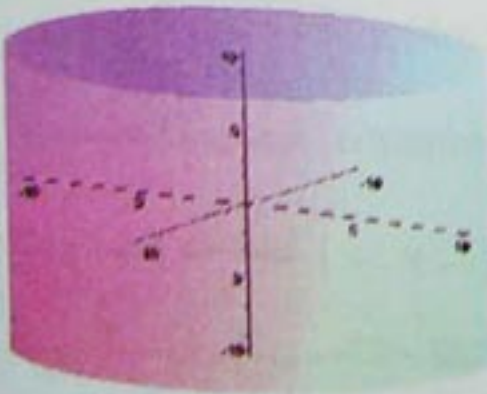
(b) مقطع بمستوي (P) يوازي (XOZ) أو (YOZ) :

في هذه الحالة يكون مقطع Σ بواسطة (P) ، $(x = a)$ أو $(y = a)$ هو اتحاد مستقيمين موازيين لـ (OZ)

أو مستقيم يوازي (OZ) أو مجموعة خالية .

برهان : (P) يوازي (YOZ) ، $M(x; y; z)$ تنتمي إلى مقطع Σ بواسطة (P) ، $(x = a)$ ،

معناه $x^2 + y^2 = R^2$ و $x = a$ أي أن $x^2 + y^2 = R^2 - a^2$



$|a| > R$ المقطع مجموعة خالية

$|a| = R$ المقطع مستقيم موازي لـ (OZ) و المعروف بـ $x = a$ و $y = 0$

$|a| < R$ المقطع اتحاد مستقيمين يوازيان (OZ) معرفين بالجمليتين $\begin{cases} x = a \\ y = \sqrt{R^2 - a^2} \end{cases}$ و $\begin{cases} x = a \\ y = -\sqrt{R^2 - a^2} \end{cases}$

تمرين محلولة 1:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر السطح الاسطوانى الدوراني الذي معادلته الديكارتية $x^2 + y^2 = 25$

(1) عین تقاطع السطح مع المستويات التي معادلته $x = 4$ ، $x = -5$ ، $x = 7$

(b) مثل السطح الاسطوانى و التقاطعات السابقة.

(2) نعتبر المستوى (P) الذي معادلته $x = k$. عین تقاطع السطح الاسطوانى مع المستوى (P)

(3) ليكن $k \in [-5; 5]$ نعتبر المستقيمت (D_k) حيث $(D_k): \begin{cases} x = k \\ y = \sqrt{25 - k^2} \end{cases}$

و المستقيمت (D'_k) حيث $(D'_k): \begin{cases} x = k \\ y = -\sqrt{25 - k^2} \end{cases}$

تحقق أن (D_k) و (D'_k) محتويان في السطح الاسطوانى

- بين أن السطح الاسطوانى هو اتحاد المستقيمت (D_k) و (D'_k) لما k يسمح المجال $[-5; 5]$

حل: (1) تقاطع السطح الاسطوانى مع المستوى $(x = 4)$ هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث

$$\begin{cases} x = 4 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \text{ أي } y = 3 \text{ أو } y = -3 \text{ فالتقاطع هو اتحاد المستقيمتين } \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

تقاطع السطح الاسطوانى مع المستوى $(x = -5)$ هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث $\begin{cases} x = -5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

$$\text{أي } \begin{cases} x = -5 \\ y^2 = 0 \end{cases} \text{ فهو المستقيم الذي معادلته } \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$$

تقاطع السطح الاسطوانى مع المستوى $(x = 7)$ مجموعة خالية لأن الجملة $\begin{cases} x = 7 \\ y^2 = -24 \end{cases}$ مستحيلة

(2) تقاطع السطح الاسطوانى مع $(x = k)$ هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث $\begin{cases} x = k \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

مع $k \in [-5; 5]$ ، فهو اتحاد المستقيمتين (D_k) و (D'_k) معادلتهما $\begin{cases} x = k \\ y = \sqrt{25 - k^2} \end{cases}$ و $\begin{cases} x = k \\ y = -\sqrt{25 - k^2} \end{cases}$

(3) حسب السؤال (2)، (D_k) و (D'_k) هما تقاطع السطح الاسطوانى مع المستوى الذي معادلته $x = k$ فهما محتويان في السطح

وبالعكس $M(x; y; z)$ نقطة من السطح معناه $x^2 + y^2 = 25$ و بالتالي $x^2 \leq 25$ أي $-5 \leq x \leq 5$

نضع $x = k$ نحصل على $y = \sqrt{25 - k^2}$ أو $y = -\sqrt{25 - k^2}$ أي أن M تقع على (D_k) أو (D'_k) .

سطح مخروط دوراني



الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

1- تعريف: I نقطة من المحور (OZ) ، الدائرة التي مركزها I

و تقع في مستوي يوازي (XOY) .

سطح مخروط دوراني ، (C) قاعدة له و رأسه O هو اتحاد المستقيمات

التي تمر من O و تشمل نقطة من (C) .

• كل مستقيم من هذه المستقيمات مولد للسطح المخروطي الدوراني

• هو مجموعة المستقيمات الموازية لـ (OZ) و التي تشمل نقطة من (C)

• كل مستقيم من هذه المستقيمات مولد لهذا السطح الاسطواني

2- مبرهنة: (Γ) سطح المخروط الدوراني الذي محوره (OZ) و (C) قاعدة له و رأسه O

(Γ) هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث $x^2 + y^2 = k^2 z^2$ ، $k > 0$. تسمى المعادلة السابقة ،

المعادلة الديكارتية لـ (Γ)

برهان: (c) الدائرة التي مركزها $I(0; 0; a)$ و نصف قطرها R ، (C) تقع على المستوي الذي معادلته

$z = a$ ، $(a \neq 0)$ ، نقطة من (Γ) تختلف عن O .

$m(0; 0; z)$ المسقط العمودي لـ M على (OZ) ، A نقطة تقاطع (C) مع (OM) .

$M(x; y; z)$ نقطة من (Γ) معناه المثلثين OMm و OAI متشابهان و بالتالي $\frac{Mm}{AI} = \frac{Om}{OI}$

$$أي \quad Mm^2 = AI^2 \times \frac{Om^2}{OI^2} \quad أو \quad Mm = AI \times \frac{Om}{OI}$$

$$أي أن \quad (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2 = R^2 \frac{z^2}{a^2} \quad و منه \quad x^2 + y^2 = k^2 z^2 \quad (k = \frac{R}{a})$$

و بالعكس : مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث $x^2 + y^2 = k^2 z^2$ $(k = \frac{R}{a})$ هو سطح مخروط

دوراني (غير المحدد) الذي رأسه O و (C) قاعدة له حيث (C) الدائرة التي مركزها $K(0; 0; 1)$ و نصف

قطرها k و تقع على السطح $(z = 1)$

2- مقطع سطح مخروط دوراني بمستوي:

• مقطع بمستوي يوازي (XOY) :

مبرهنة: مقطع سطح مخروط دوراني (Γ) محوره (OZ) و رأسه O بمستوي (P) يوازي (XOY) هو النقطة

O أو دائرة من المستوي (P) مركزها نقطة من (OZ)

• مقطع بمستوي يوازي (XOZ) أو (YOZ) :

مبرهنة: مقطع سطح مخروط دوراني (Γ) محوره (OZ) و رأسه O بمستوي (P) معادلته $(x = a)$ أو $(y = a)$

هو اتحاد مستقيمين يتقاطعان في O أو قطع زائد .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر (C) السطح الاسطوانى الدوراني الذي معادلته الديكارتية $x^2 + y^2 = 9z^2$

(1) بين أن تقاطع (C) مع المستوي (P) الذي معادلته $z = 2$ هو دائرة يطلب إعطاء معادلة لها

في المستوي (P) ، أوجد في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ إحداثيات مركز هذه الدائرة

(2) لتكن A النقطة التي إحداثياتها $(3; 0; 0)$ و (Q) المستوي الذي معادلته $x = 3$. أكتب في المعلم

$(A; \vec{j}; \vec{k})$ للمستوي (Q) معادلة تقاطع (C) مع (Q) .

- مثل بيانيا هذا التقاطع باستعمال برمجية مناسبة

الحل: (1) معادلة (C) هي $x^2 + y^2 = 9z^2$ تقاطعه مع المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ z = 2 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x^2 + y^2 = 9z^2 \\ z = 2 \end{cases} \text{ التي تحقق}$$

تعرّف الجملة السابقة الدائرة التي معادلتها في المستوي (P) هي $x^2 + y^2 = 36$ مركزها في هذا المستوي هو

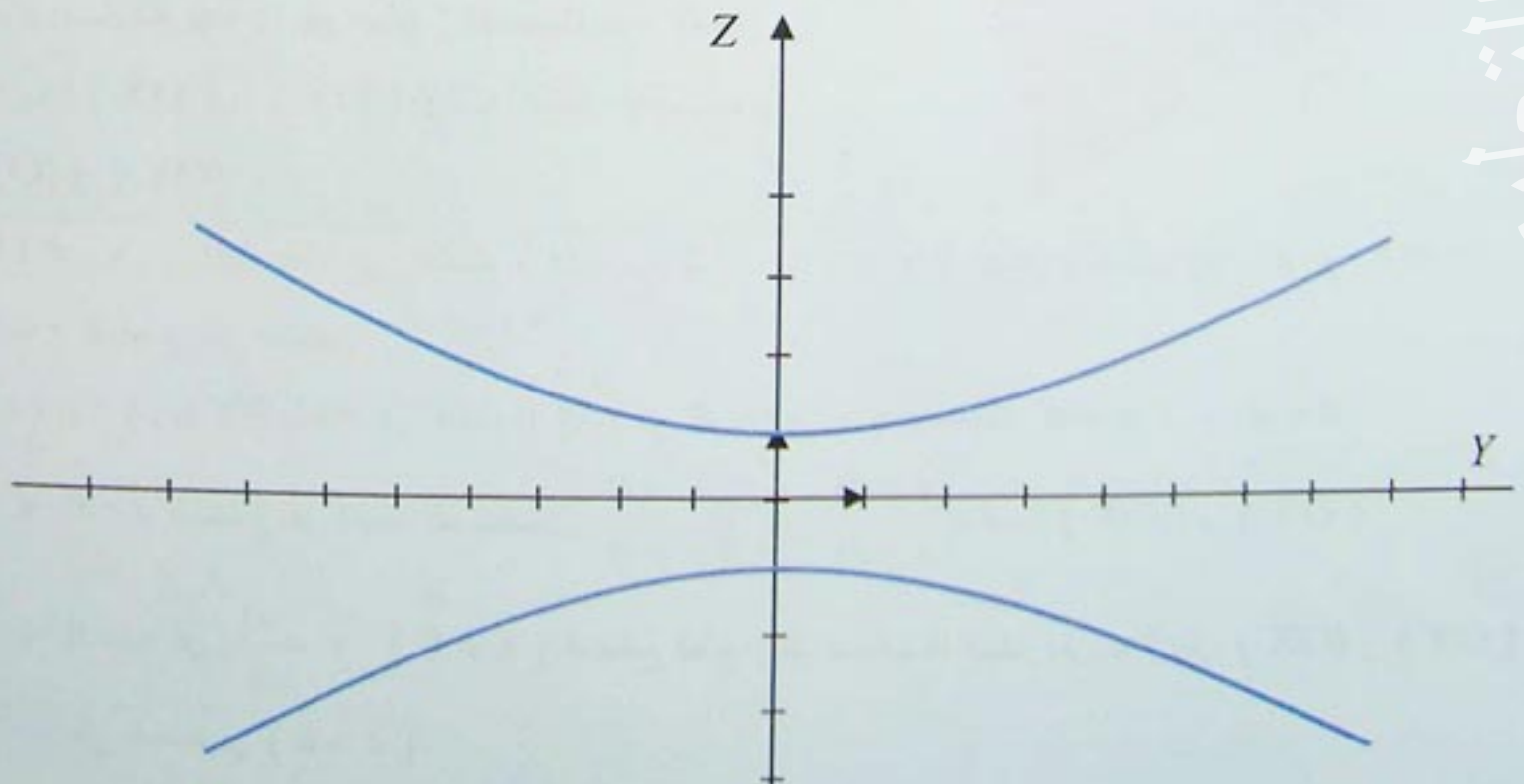
النقطة $(0; 0)$ أما إحداثيات هذا المركز في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ فهي $(0; 0; 2)$

$$(2) \text{ تقاطع } (C) \text{ مع المستوي } (Q) \text{ هو مجموعة النقط } M(x; y; z) \text{ التي تحقق } \begin{cases} x^2 + y^2 = 9z^2 \\ x = 3 \end{cases}$$

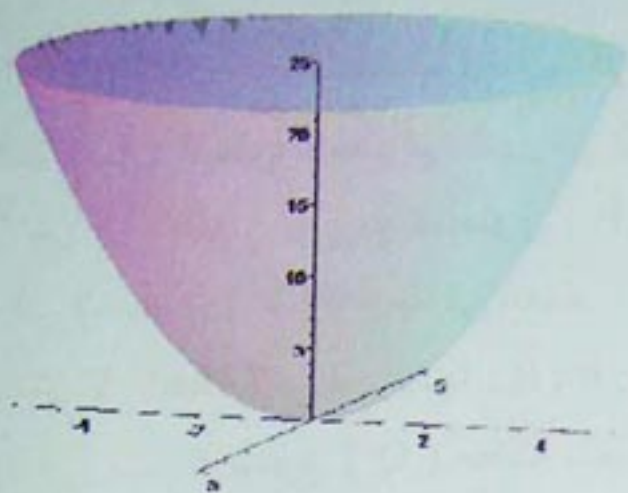
$$\begin{cases} z^2 = \frac{1}{9}(y^2 + 9) \\ x = 3 \end{cases} \text{ أي}$$

في المعلم $(A; \vec{j}; \vec{k})$ للمستوي (Q) تقاطع (C) مع (Q) هو المنحنى الذي معادلته كما يلي

$$z = \frac{1}{3}\sqrt{y^2 + 9} \quad \text{أو} \quad z = -\frac{1}{3}\sqrt{y^2 + 9}$$



المجسم المكافئ - المجسم الزائدي



1- تعريف :

f دالة لمتغيرين في معلم للفضاء ،
مجموعة النقط M ذات الإحداثيات $(x; y; z)$ حيث
 $z = f(x; y)$ هو التمثيل البياني للدالة f
و يسمى المساحة التي معادلتها $z = f(x; y)$

2- تعريف : المساحة التي معادلتها $z = x^2 + y^2$

تدعى مجسما مكافئا محوره (OZ)

3- مبرهنة : مقطع المساحة (S) ذات المعادلة $z = x^2 + y^2$

① بمستوى معادلته $x = a$ أو $y = a$ هو قطع مكافئ محوره يوازي (OZ)

② بمستوى معادلته $z = a$ هو دائرة مركزها يقع على (OZ) أو النقطة O

برهان : ① نقطة $M(x; y; z)$ من (S) و من المستوي $(x = a)$ أو $(y = a)$ معناه $z = x^2 + a^2$ أو

$z = y^2 + a^2$ ، المقطع إذن هو قطع مكافئ محوره (OZ)

② نقطة $M(x; y; z)$ من (S) و من المستوي $(z = a)$ معناه $x^2 + y^2 = a$ و $z = a$

$a < 0$ التقاطع مجموعة خالية

$a = 0$ التقاطع هو النقطة O

$a > 0$ التقاطع دائرة مركزها يقع على (OZ)

4- تعريف : المساحة التي معادلتها $z = xy$ تدعى مجسما زائديا

5- مبرهنة : مقطع المجسم (H) ذي المعادلة $z = xy$

① بمستوى معادلته $x = a$ أو $y = a$ هو مستقيم

② بمستوى معادلته $z = a$ هو قطع زائد مستقيماه المقاربين

يوازيان (OX) و (OY) أو هو اتحاد المستقيمين

(OX) و (OY)

برهان : ① نقطة $M(x; y; z)$ من تقاطع (H) مع المستوي $x = a$ أو $y = a$ معناه $z = ay$ و $x = a$

أو $z = ax$ و $z = a$ المقطع إذن مستقيم

② نقطة $M(x; y; z)$ من تقاطع (H) مع المستوي $z = a$ معناه $xy = a$ و $z = a$

$a = 0$ المقطع هو اتحاد المستقيمين $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ فهما (OY) و (OX)

$a \neq 0$ أي $y = \frac{a}{x}$ ($x \neq 0$) المقطع قطع زائد مستقيماه المقاربين يوازيان (OX) و (OY)

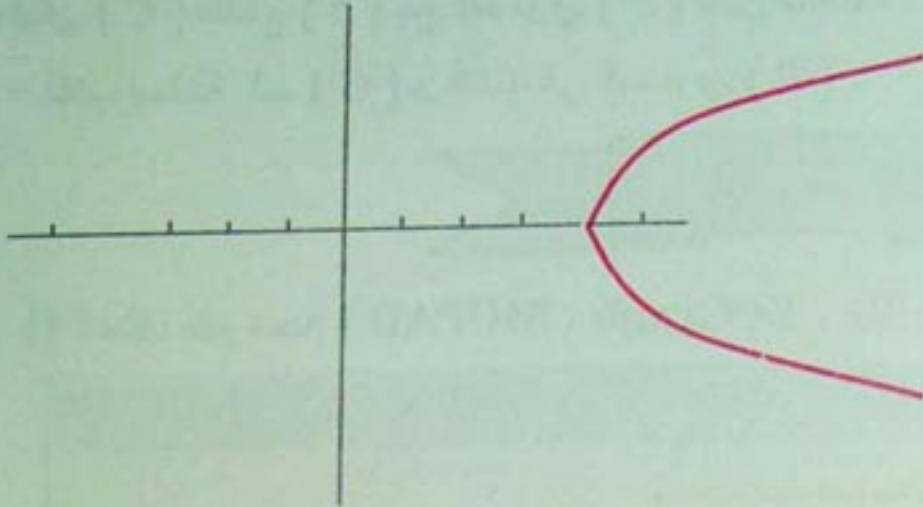
في المستوي $(z = a)$

تمرين محلول 3 :

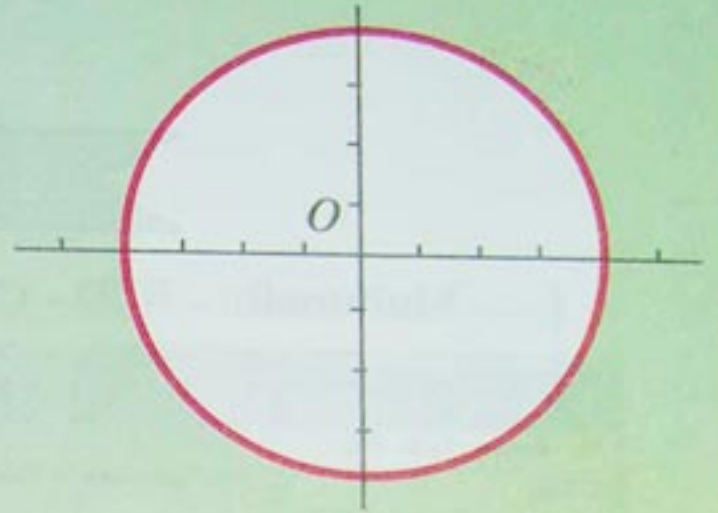
نعتبر المساحة (S) التي معادلتها $z = x^2 + y^2$ في معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء.

(P) و (Q) مستويان كل منهما يوازي (XOY) أو (XOZ) أو (YOZ)

تقاطع (P) و (Q) مع (S) ممثلة على الشكلين



(Q) تقاطع (S)



(P) تقاطع (S)

- أكتب معادلة ممكنة للمستوي (P) . - أكتب معادلة ممكنة للمستوي (Q)

الحل: كل مستوي (H) يوازي أحد المستويات (XOY) ، (XOZ) أو (YOZ) له معادلة من الشكل

$z = k$ ، $y = k$ ، أو $x = k$ حيث k عدد حقيقي .

(S) هي المساحة التي معادلتها $z = x^2 + y^2$

تقاطع (S) مع المستوي (H) الذي معادلته $z = k$ هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = k \\ z = k \end{cases} \text{ دائرة أو نقطة أو مجموعة خالية .}$$

تقاطع (S) مع المستوي (H) الذي معادلته $y = k$ هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث

$$\begin{cases} z = x^2 + k^2 \\ y = k \end{cases} \text{ قطع مكافئ}$$

تقاطع (S) مع المستوي (H) الذي معادلته $x = k$ هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث

$$\begin{cases} z = k^2 + y^2 \\ x = k \end{cases} \text{ قطع مكافئ .}$$

* تقاطع (P) و (S) هو دائرة مركزها O و نصف قطرها 4 و بالتالي معادلة (P) هي من الشكل $z = k$

و نصف قطر الدائرة $\sqrt{k}$ إذن $k = 16$ معادلة (P) هي $z = 16$

* تقاطع (Q) و (S) قطع مكافئ و بالتالي (Q) له معادلة من الشكل $x = k$ أو $y = k$

رأس القطع المكافئ $(y = 0; z = k^2)$ أو $(x = 0; z = k^2)$ على الشكل (OZ) أفقي و $k^2 = 4$

إذن $k = 2$ أو $k = -2$ معادلة (Q) هي $x = 2$ أو $x = -2$ أو $y = 2$ أو $y = -2$

$$z = f(x; y) = \frac{xy - 1}{x^2 + 1} \quad (S) \text{ المساحة التي معادلتها}$$

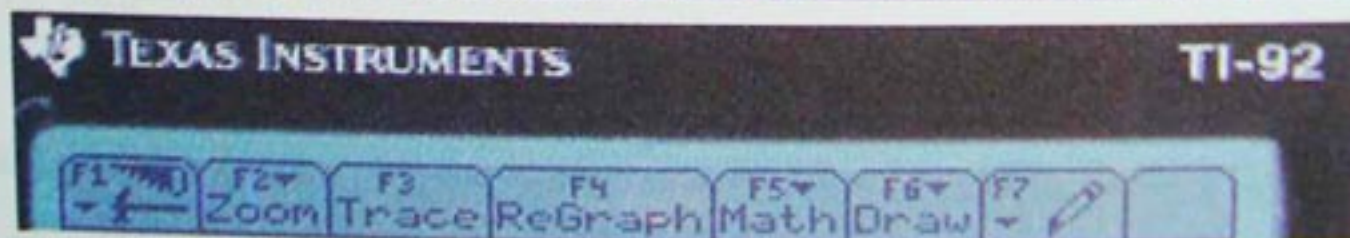
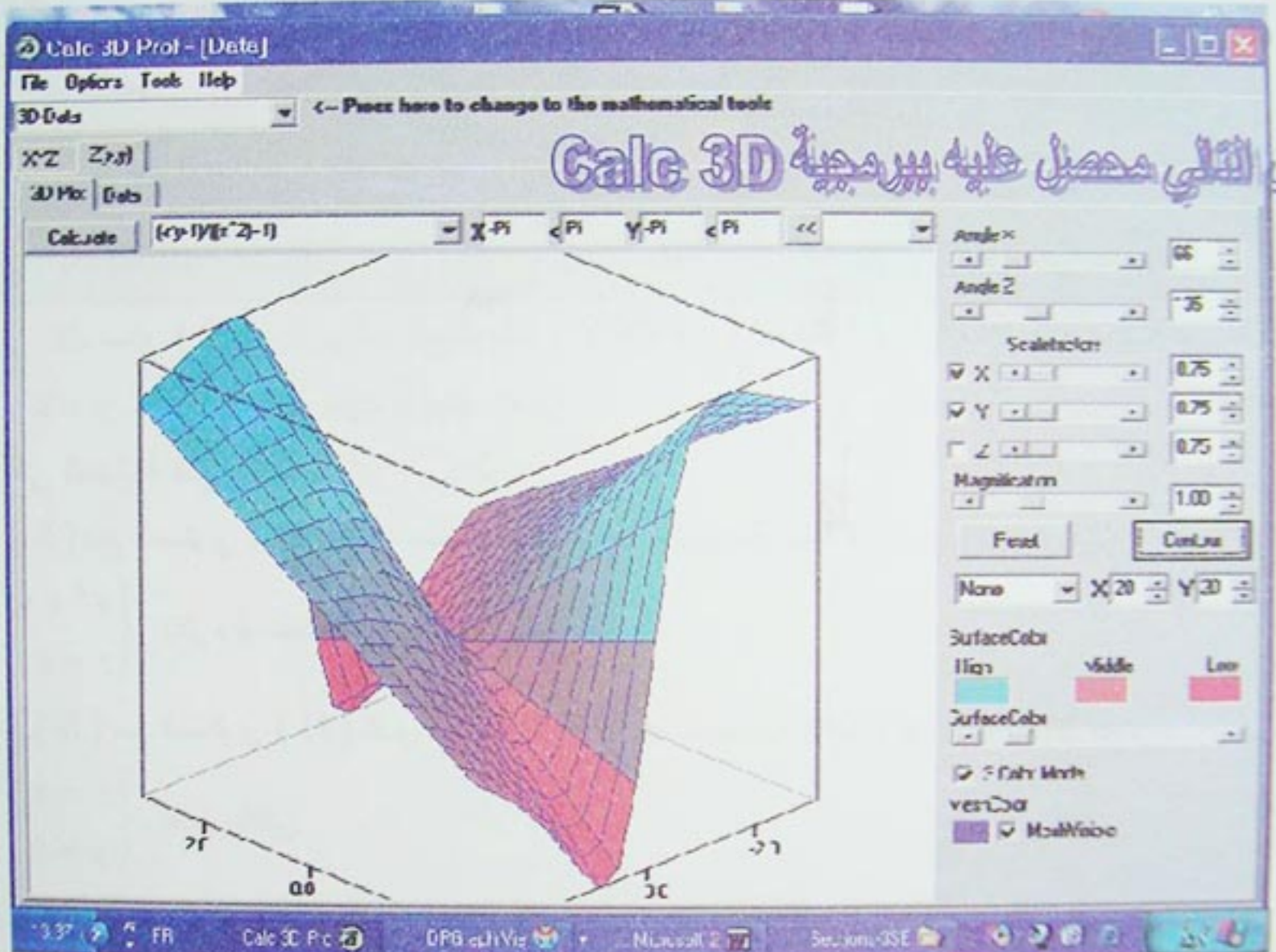
(1) باستعمال برمجية مناسبة أو آلة حاسبة مثل f

(2) ليكن (C) تقاطع (S) مع المستوي (P) الذي معادلته : $z = 0$.

- أكتب معادلة (C) و أنشئه في المستوي (P) .

الحل

(1) التمثيل بالبرمجية (MUPAD ، DPGraph ، Calc 3D ، K3D ، Multimath :)



Eyeθ = 59	Eyeφ = 1000	Eyeψ = -18,49	Xmin = -10	Xmax = 10	Xgrid = 20
Ymin = -10	Ymax = 10	Ygrid = 20	Zmin = -5	Zmax = 4	Ncontour = 5

(2) $z = f(x; y) = \frac{xy - 1}{x^2 + 1} : (S)$ وبالتالي $xy - 1 = 0 : (S)$ أي $y = \frac{1}{x}$ ، $z = 0 : (P)$ ، $z = f(x; y) = \frac{xy - 1}{x^2 + 1}$

(C) القطع الزائد الذي معادلته $y = \frac{1}{x}$

(1) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

$$z = \frac{xy}{x^2 + 1} + \frac{y}{10}$$

نعتبر المساحة (S) التي معادلتها

- باستعمال مجلد أنشئ (S)

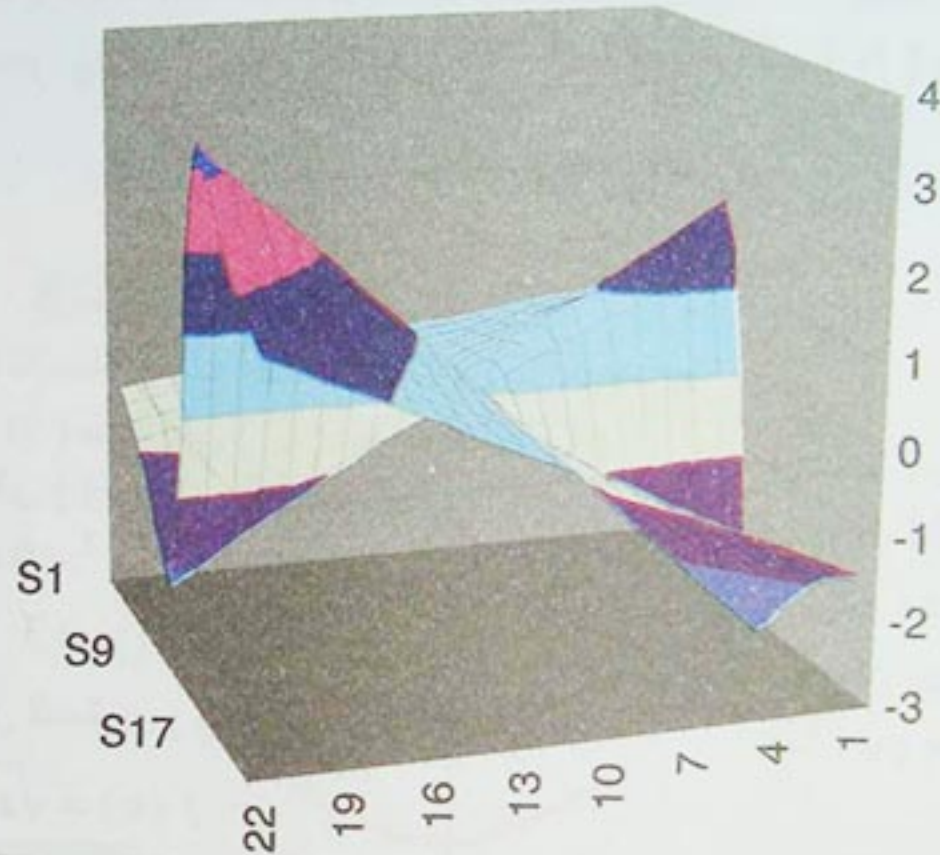
السطر الأول : خاصة بقيم x المحصورة بين (-5) و (5) (انطلاقا من A2)

نكتب في الخانة B2 الدستور $= B\$1 * \$A2 / (B\$1^2 + 1) + \$A2 / 10$ ثم Enter

نعم هذا الدستور باستعمال الزلق على المستطيل من B2 إلى V22

التمثيل من الصنف " Surface "

ستحصل على شكل مماثل لهذا



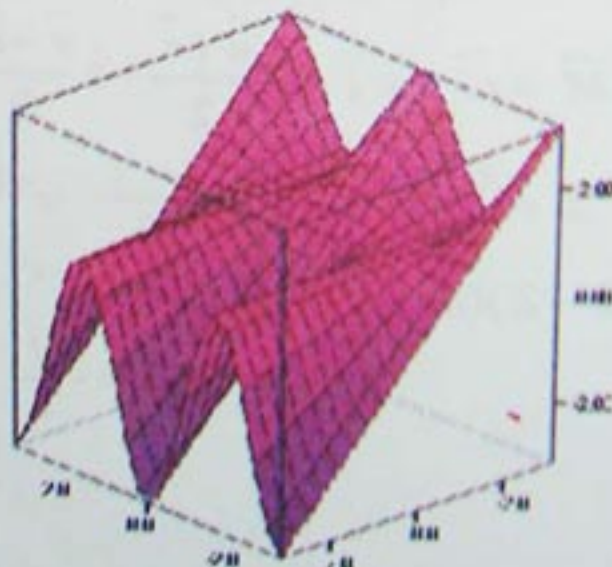
(2) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

$$z = 5 \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} \right)$$

نعتبر المساحة (S) التي معادلتها

- باستعمال الحاسبة (TI92 مثلا) وبعد اختيار النمط 3D ثم أكتب المعادلة $z = 5 \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} \right)$

و بعد ذلك معاينة (S) .



(3) باستعمال برمجية ما ،

عين المساحة (S) التي معادلتها

$$z = -x \cos^2 y + \sin^2 y$$

(a) أكتب في المعلم $(A; \vec{i}; \vec{k})$ للمستوي (Q) معادلة (H) . بين أنه توجد دالة f بحيث يكون (h) اتحاد المنحنيين اللذين معادلتيهما $z = f(x)$ و $z = -f(x)$ ، مثل (H) في المستوي (Q) .

(b) نعتبر الشعاعين $\vec{u} = \vec{i} - \vec{k}$ و $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$. بين أنه إذا كان $M(x; y)$ في المعلم $(A; \vec{i}; \vec{k})$

$$\text{فإن } \overrightarrow{AM} = \frac{x-z}{2} \vec{u} + \frac{x+z}{2} \vec{v}$$

(c) لتكن $(X; Z)$ إحداثيي M في المعلم $(A; \vec{u}; \vec{v})$. أثبت أن M تنتمي إلى (H) معناه $XZ = -\frac{9}{4}$. مثل في $(A; \vec{u}; \vec{v})$

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر (C) سطح المخروط الدوراني الذي معادلته $x^2 + y^2 = z^2$.

(1) بين أن المستقيم (D) ذا التمثيل الوسيط

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}t \\ z = 2t \end{cases} \text{ مستقيم مولد لـ } (C)$$

(2) إكن النقطة A ذات الإحداثيات $(0; 3; 0)$ وليكن (P) المستوي الذي معادلته $y = 3$ و (H) تقاطع (C) مع (Q) .

تعليق

لدينا $\overrightarrow{AM} = x\vec{i} + (y-3)\vec{j} + z\vec{k}$ و بما أن M نقطة من (Q) يكون $\overrightarrow{AM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ أي أن إحداثيي M في $(A; \vec{i}; \vec{k})$ هما $(x; y)$

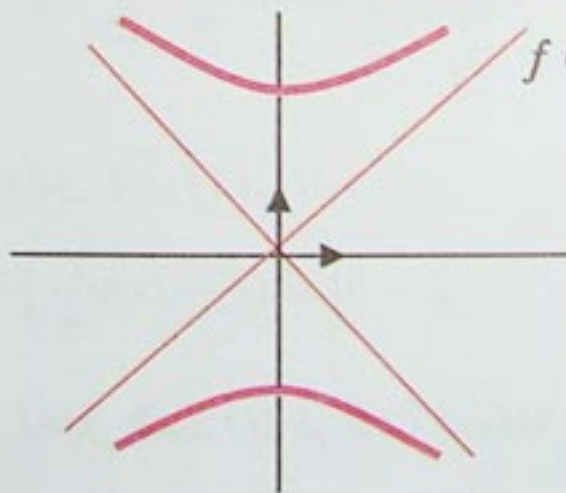
تمثيل $(-f)$ بالتناظر بالنسبة للمحور (AX)

حل مختصر

(1) $M(x; y; z) \in (D)$ نلاحظ $x^2 + y^2 = t^2 + 3t^2 = 4t^2 = z^2$ إذن M تقع على (C) . (D) محتو في (C) فهو مولد لـ (C)

(2) $M(x; y; z)$ تنتمي إلى (H) إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ y = 3 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x^2 + 9 = z^2 \\ y = 3 \end{cases}$

معادلة (H) في $(A; \vec{i}; \vec{k})$ من المستوي (Q) هي $z^2 = x^2 + 9$



تغيرات الدالة f حيث $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

X	$-\infty$	0	$+\infty$
F'(x)	-	0	+
F(x)	$+\infty$	3	$+\infty$

$$\overrightarrow{AM} = x\vec{i} + y\vec{j} = x \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2} + z \frac{\vec{v} - \vec{u}}{2} = \frac{x-z}{2} \vec{u} + \frac{x+z}{2} \vec{v} \quad (b)$$

$$\overrightarrow{AM} = X\vec{u} + Y\vec{v} \quad (c) \text{ وبالتالي } X = \frac{x-z}{2} \text{ و } Z = \frac{x+z}{2}$$

معادلة (H) : $X^2 - Z^2 = -9$ معناه $(X-Z)(X+Z) = -9$

$$\text{أي أن } 2X \times 2Z = -9 \text{ أو } XZ = -\frac{9}{4}$$

$$f(x; y) = \frac{4x + 2}{x^2 + y^2 + 2} \text{ حيث } f \text{ الدالة}$$

- (1) أدرس تقاطع المساحة (S) ذات المعادلة $z = f(x; y)$ مع المستويات $z = 0, z = 1, z = 2, z = 4$
 (2) عين القيم الحدية M و m للدالة f

توجيهات

1. دراسة تقاطع (S) مع مستوي تقتضي حل الجملة مشكلة بمعدلتيهما
 2. نقبل f نهاية حدية إذا وجد مستوي معادلته من الشكل $z = k$ يمس المساحة (S)
 هذا يستدعي حل و مناقشة الجملة

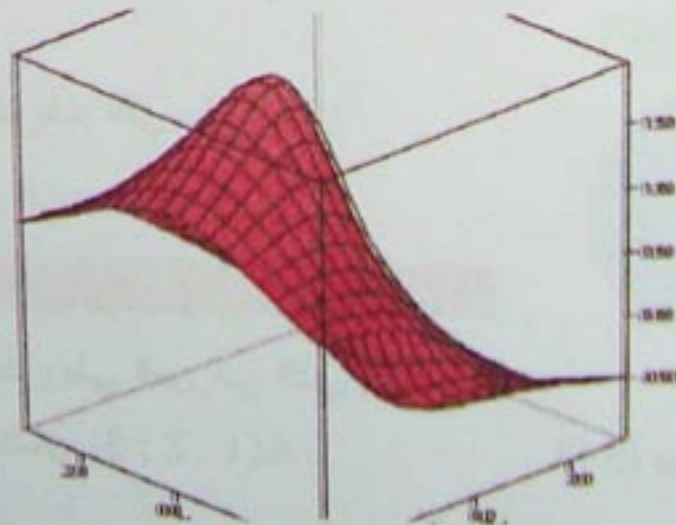
$$\begin{cases} z = f(x; y) \\ z = k \end{cases}$$

مع k وسيط حقيقي

$$\left(x - \frac{2}{k}\right)^2 + y^2 = \frac{-2k^2 + 2k + 4}{k^2} \quad \text{ستجد}$$

نضع الشرط اللازم كي نقبل هذه المعادلة حلولا

حتى يكون المستوي ماسا للمساحة (S) يجب أن يكون $k^2 - k - 2 = 0$
 ينتج عن هذه المعادلة الأخيرة حلان هما القيمتان الحديتان المطلوبتان.



$$f(x; y) = \frac{4x + 2}{x^2 + y^2 + 2}$$

$$x = y, z = -2, z = 1$$

7 (D) المستقيم الذي يمر بالنقطة O وشعاع توجيه له

(C) هو سطح المخروط الذي محوره

(OZ) و يحوي المستقيم (D)

(1) عين معادلة لـ (C)

(2) (a) عين العدد الحقيقي الموجب تماما a حتى يكون

مقطع

(C) بالمستوي الذي معادلته $z = a$ ، دائرة (Γ)

نصف قطرها 2

(b) احسب احداثيات مركز (Γ)

8 في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

(1) (a) بين أن المستويين (P) و (Q) اللذين معادلاتهما

$$2x - z = 0; x + y\sqrt{3} - 2z = 0$$

متوازيين

(b) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) تقاطع (P) و (Q)

(c) نعتبر (H) سطح المخروط الدوراني الذي محوره

(OX) و يشمل المستقيم (D) كمولد

- بين أن معادلة (H) هي $y^2 + z^2 = 7x^2$

(2) مثلنا على الشكلين التاليين تقاطع (H) مع

مستويات موازية لمحاور الاحداثيات.

- عين في كل حالة معادلة للمستويات الممكنة مع التعليل

الشكل (2)



الشكل (1)



(3) (a) بين أن المعادلة $x^2 = 3[7]$ التي مجهولها x عدد

صحيح لا تقبل حولا

(b) بين الخاصية التالية :

1 أكتب معادلة سطح الأسطوانة الذي محوره (OZ)

و الذي يشمل النقطة $A(3; -2; 5)$

- هل يشمل هذا السطح النقطة $B(1; 2\sqrt{3}; -1)$ ؟

- هل يشمل $C(-\sqrt{7}; 2; 0)$ ؟

- هل يشمل $D(\sqrt{5}; 2\sqrt{2}; \sqrt{5})$ ؟

2 أكتب معادلة سطح الاسطوانة الذي محوره (OZ) و

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$$

يشمل المستقيم (D) الذي معادلته

3 في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط $M_i(x; y; z)$ حيث

$z = t, y = \sin t, x = \cos t$ مع T عدد حقيقي

(1) بين أن النقط $M_i(x; y; z)$ تقع على (C) سطح

الأسطوانة الذي محوره (OZ) و نصف قطره 1

(2) هل مجموعة النقط $M_i(x; y; z)$ لما تمسح t

مجموعة الاعداد الحقيقية هي (C) سطح الاسطوانة ؟

4 (C) هو سطح الأسطوانة التي محورها (OZ) و

التي تشمل $A(1; 2; 3)$

(1) عين معادلة لـ (C)

(2) ميز مقاطع (C) بالمستويات التي معادلاتها :

$$z = -4, y = -3, x = 2$$

5 (C) هو سطح الأسطوانة التي محورها (OX) و

التي تشمل $A(1; 2; 3)$

(1) عين معادلة لـ (C)

(2) ميز مقاطع (C) بالمستويات التي معادلاتها :

$$z = -4, y = -3, x = 2$$

مقاطع مخروطية

6 (C) هو سطح المخروطي الدوراني الذي رأسه O

ومحوره (OZ) و الذي يشمل $A(1; 2; 3)$

(1) عين معادلة لـ (C)

(2) ميز مقاطع (C) بالمستويات التي معادلاتها :

لكل عددين صحيحين a و b ، إذا كان $a^2 + b^2$ يقسم 7 فإن a يقسم 7 و b يقسم 7 .

(4) a ، b و c أعداد صحيحة غير معدومة ، بين أنه إذا كانت النقطة $A(a; b; c)$ نقطة من (H) سطح المخروط الدوراني يكون a ، b و c مضاعفات للعدد 7 .
(b) استنتج أن النقطة الوحيدة نت (H) و التي إحداثياتها أعداد صحيحة هي رأسه .

9 في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(0; 5; 5)$ و $B(0; 0; 10)$

(1) في هذا السؤال نعتبر المستوي (P) الذي معادلته :
 $x = 0$

منسوب إلى المعلم $(O; \vec{j}; \vec{k})$. في هذا المستوي نعتبر الدائرة (C) التي مركزها B و تشمل A

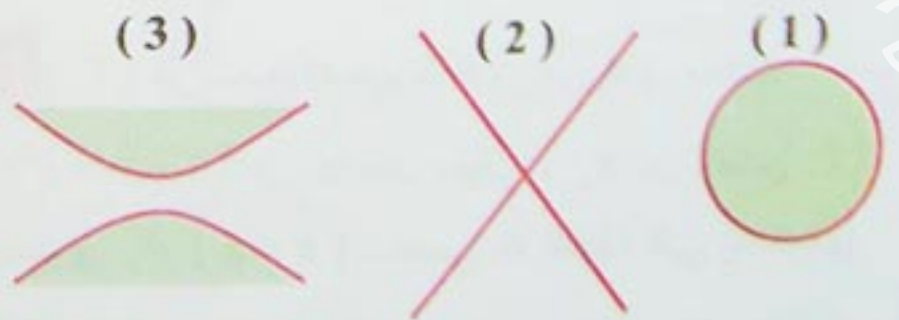
- بين أن المستقيم (OA) مماس للدائرة (C)

(2) (S) الكرة الناتجة عن دوران (C) حول (OZ) و (T) سطح المخروط الناتج عن دوران (OA) حول (OZ)

(a) بين أن معادلة (T) هي $x^2 + y^2 = z^2$

(b) عين تقاطع (T) مع (S) (أنكر الطبيعة و العناصر المميزة) .

(3) أحد الأشكال المولية هو تقاطع (T) مع مستو (P_1) معادلته $x = 1$. أي هذه الأشكال مناسب ؟ علل



$M(x; y; z)$ نقطة من (T) إحداثياتها أعداد صحيحة غير معدومة . بين أن x و y لا يكونان فرديين معا .

مقاطع سطحين معادلتهما $z = xy$; $z = x^2 + y^2$

10 نعتبر المساحة (S) التي معادلتها $z = f(x; y)$

من أجل كل عدد حقيقي k تقاطع (S) مع المستوي $z = k$

هو المستقيم الذي يشمل $A(0; 1-k; k)$ و $\bar{u}(1; 3; 0)$ شعاع توجيه له . عين (S) و اكتب معادلة ديكرتية له .

11 نعتبر المساحة (S) التي معادلتها $z = x^2$

(1) عين مقطع (S) بالمستويات الموازية لـ (XOY)

(2) عين مقطع (S) بالمستويات الموازية لـ (XOZ)

(3) بين أن (S) تقبل مستوي تناظر

12 نعتبر المساحة (S) التي معادلتها

$$z = f(x; y) = x^2 + xy$$

(1) بين أن مقطع (S) مع المستوي $z = 0$ هو اتحاد مستقيمين يطلب تعيينهما .

(2) أدرس مقاطع (S) بالمستوي الذي معادلته $z = k$

حيث k عدد حقيقي غير معدوم (بالخصوص المستقيمات المقاربة)

13 نعتبر المساحة (S) التي معادلتها $z = \sqrt{|x - y|}$

(1) اكتب معادلة مستوي التناظر لـ (S)

14 نعتبر الدالة f ذات المتغيرين

$$f(x; y) = xe^{-x^2 - y^2} + 3$$

(S) هي المساحة التي معادلتها $z = f(x; y)$

(1) بين أن (S) تقبل المستوي الذي معادلته $y = 0$

مستويا للتناظر .

(2) نعتبر الدالة g حيث $g(x) = f(x; 0)$

أدرس تغيرات g ، استنتج القيمة الحدية لـ (S)

(نقبل أنها لا تقبل إلا قيمة حدية واحدة)

(3) M نقطة من (S) ، أدرس الحالة التي يكون فيها بعد M عن O غير منته

15 في الفضاء نعتبر (S) المساحة التي معادلتها :

$$z = (x-1)^2 + (y-3)^2 \text{ و النقطة } A(1; 3; 0)$$

(1) اكتب معادلة (S) في المعلم $(A; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

(2) استنتج طبيعة (S) و عناصرها المميزة

16 نعتبر الدالة f حيث $f(x; y) = \ln|y - x^2|$

(1) عين الأزواج الحقيقية $(x; y)$ التي تكون من ألفتها f غير معرفة

(2) بين أن (S) تقبل مستويا للتناظر و ادرس مقاطع (S) بالمستويات $z = k$ مع k عدد حقيقي غير معدوم

مسائل

17 في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر المساحة (T) التي معادلته

$$x^2 y = z \quad \text{حيث} \quad -1 \leq x \leq 1; \quad -1 \leq y \leq 1$$

(1) تحقق أنه إذا كان $M(x; y; z)$ نقطة من (T) فإن $M'(-x; y; z)$ نقطة من (T) . استنتج مستو تناظر لـ (T) .

(b) بين أن النقطة O مركز تناظر لـ (T)

(2) ما طبيعة منحنيات تقاطع (T) مع المستويات المبرزية لـ (XOZ) ؟

(b) ما طبيعة منحنيات تقاطع (T) مع المستويات المبرزية لـ (YOZ) ؟

(3) عين تقاطع (T) مع المستوي ذي المعادلة $z = 0$

(b) من أجل $k > 0$ نضع $K(0; 0; k)$ عين في

المعلم $(K; \vec{i}; \vec{j})$ معادلة منحن التقاطع بين (T) و المستوي الذي معادلته $z = k$.

(b) لفتى المنحنى السابق في $(K; \vec{i}; \vec{j})$ عين لخصوص إحداثيات طرفي القوس.

(4) مجموعة النقط التالية

$$(D) = \left\{ M \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq x^2 y \right\}$$

(a) من أجل $0 \leq k \leq 1$ من المستوي $(z = k)$ يقطع

(D) في مساحة R هي مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من

المكعب الذي ضلعه 1 حيث $y \geq \frac{k}{x^2}; z = k$

- أحسب بدلالة k ، $S(k)$ مساحة R .

(b) نضع $S(0) = 1$ ، أحسب (بوحدة الحجم)

$$V \text{ حجم } (D) \quad \left(V = \int_0^1 S(k) dk \right)$$

18 في مستو (P) من الفضاء، نعتبر دائرة (C)

قطرها $[AB]$. (Δ) المستقيم الذي يشمل A والعمودي على (P) و (S) نقطة من (Δ) تختلف عن A .

I المسقط العمودي لـ A على المستقيم (BS)

من أجل كل نقطة M من (C) نضع H المسقط العمودي لـ A على (MS) .

(1) أرسم (Δ) (أفيا).

(2) بين أن H يتتبع الى سطح الكرة التي قطرها $[AS]$

(3) نفرض أن M يختلف عن A و B . بين أن (MB) عمودي على المستوي (AMS) .

- استنتج أن المستقيم (AH) عمودي على (BMS)

(4) بين أن H تنتمي الى المستوي (P) الذي يشمل I و العمودي على (BS) .

(5) عين (T) تقاطع Σ مع (P)

(b) بين أن مجموعة النقط H عندما تتحرك M على (C)

هي (T) ، (N') نقطة من (T) تختلف عن A ،

يمكن أن نبين أن المستوي $(AN'S)$ يقطع (C) في A

و نقطة أخرى M

19 (C) هو سطح المخروط الدوراني الذي معادلته

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 \quad a \text{ عدد حقيقي، } x_0 \text{ هو مقطع } (C)$$

بالمستوي $P_a (x = a)$. نسمي النقطة التي إحداثياتها

$$(a; 0; 0)$$

(1) بين أن x_0 هو اتحاد مستقيمين (D_1) و (D_2)

شعاعا توجيههما $\vec{u}_1 = \lambda \vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{u}_2 = \lambda \vec{j} + \vec{k}$

(2) M نقطة من المستوي P_a إحداثياتها $(y; z)$ في

المعلم

$(A; \bar{u}_1; \bar{u}_2)$ و $(Y; Z)$ في المعلم $(A; \bar{i}; \bar{j})$

- بين أن $y = \lambda Y + \lambda Z$ و $z = -Y + Z$

(3) استنتج أنه من أجل $a \neq 0$ فإن x_a في المعلم $(A; \bar{u}_1; \bar{u}_2)$ معادلة من الشكل $y = \frac{c}{x}$ حيث c ثابت غير معدوم .

(4) ما طبيعة x_a في الحالة السابقة

20 نعتبر في الفضاء ، رباعي الوجوه OABC حيث

$OA = OB = OC = a$ مع a عدد حقيقي موجب تماما

و الوجوه الثلاثة OAB ، OAC ، OBC هي متشابهات متشابهة في النقطة O .

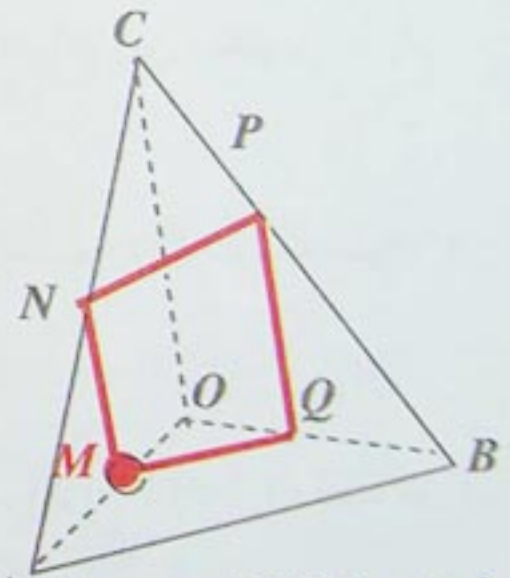
لتكن M نقطة من [OA] ، نضع $AM = x$

المستوي (P) يشمل النقطة M ويوازي المستقيمين (AB)

و (OC) يقطع المستقيمين (AC) ، (CB) و (OB)

في النقط N ، P و Q على الترتيب

(أنظر الشكل)



(1) برهن أن الرباعي MNPQ هو مستطيل

(2) أحسب بدلالة x المساحة $A(x)$ لهذا المستطيل

(3) أدرس تغيرات الدالة الناتجة و مثلها بيانيا

(4) من أجل أية قيمة لـ x تكون المساحة $A(x)$ أكبر ما يمكن ؟

(5) نزود الفضاء بالمعلم $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$

و لتكن H نقطة من [OB] ، نضع $AM = y$

و نعتبر (P') المستوي الذي يشمل النقطتين M و H ويوازي المستقيم (OC) و الذي يقطع المستقيمين (AC) و (BC) في النقطتين I و J على الترتيب .

(a) ما طبيعة الرباعي MHJI ؟

(b) أكتب بدلالة x و y مساحة الرباعي MHJI

ولتكن $S(x; y)$.

(c) هل يمكن تحديد موضعي M و H حتى تكون المساحة

$S(x; y)$ أكبر ما يمكن ؟

21 (D) ، (D') مستقيمان متعامدان و ليسا من نفس

المستوي . الفضاء المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

$(O; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$.

(D) يشمل A ذات الاحداثيات $(0; 0; 1)$

و $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j}$ شعاع توجيه له .

(D') يشمل B ذات الاحداثيات $(0; 0; -1)$

و شعاع توجيه له .

(1) تحقق أن (D) و (D') متعامدان و لا ينتميان الى

نفس المستوي فعلا .

Σ مجموعة النقط من الفضاء المتساوية البعد عن (D)

و (D') ، تحقق أن O تنتمي الى Σ .

(2) بين أن تمثيلا وسيطيا لـ (D) هو $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$

مع t عدد حقيقي .

(3) أحسب كذلك بعد M عن (D')

(4) استنتج أن M نقطة من Σ إذا و فقط إذا $xy + 2z = 0$

(5) استنتج مما سبق :

(a) أن تقاطع Σ مع المستويات العمودية على (AB) هو

على العموم قطع زائد (حدد الحالة الاستثنائية)

(b) طبيعة تقاطع Σ مع المستويات العمودية على المحور

$(O; \bar{i})$ أو المحور $(O; \bar{j})$

علّل جوابك

الفضاء المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

في كل حالة اختر الاجوبة الصحيحة

22 نعتبر المساحة (S) التي معادلتها $z = x - 3y + 5$

(أ) تقاطعات (S) مع المستويات $z = k$ (k عدد حقيقي) هي مستقيمت متوازية .

(ب) (S) مستو عمودي على المستقيم الذي يشمل O و شعاع توجيهه $\vec{u}(1; -3; 1)$

(ج) (S) يشمل المستقيم الذي يمر من $A(-2; 1; 0)$ و شعاع توجيهه $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$

23 نعتبر المساحة (T) التي معادلتها

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2$$

(أ) $C(1; 1; -2)$ تنتمي الى (T)

(ب) (T) هو سطح مخروط دوراني محوره $(O; \vec{j})$

(ج) المستقيم (d) الذي يشمل O و شعاع توجيهه $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ محتو في (T)

24 نعتبر المساحة (R) التي معادلتها

$$z = 2x + 0.5y^2 + 4$$

معادلتها $y = 0$ هو :

(أ) قطع مكافئ

(ب) مستقيم

(ج) قطع زائد

(د) جواب آخر

25 1- مجموعة النقط M من الفضاء التي إحداثياتها $(x; y; z)$ تحقق $x - 3y = 5$ ليست مساحة

2- تقاطع مجسم مكافئ معادلتها $z = x^2 + y^2$ مع سطح كرة مركزها O هو دائرة

26 المساحة التي معادلتها $z = f(x; y) = \sqrt{|x|}$ تقبل

المستوي ذا المعادلة $y = 0$ مستو للتناظر و تقاطع

المساحة مع المستويات $z = k$ (k عدد حقيقي) هو اتحاد مستقيمين موازيين لمحور القواصل .

27 المساحة التي معادلتها $z = x^2 y e^{-x}$ حيث

$$(0 \leq y \leq 10; 0 \leq x \leq 5)$$

المستوي $z = 0$ وفق مستقيمين

28 نعتبر المساحة (S) التي معادلتها $z = 2x(y + 1)$ حيث

$$(0 \leq y \leq 12; 0 \leq x \leq 10)$$

(1) النقطه $P(5; 11; 120)$ نقطه من (S)

(2) المسقط العمودي لتقاطع (S) مع المستوي ذي

المعادلة $z = 40$ على المستوي $(O; \vec{i}; \vec{j})$ هو

$$y = \frac{2-x}{x}$$

(3) المستقيم (PR) محتو في (S) حيث $R(4; 4; 40)$

الحصول على باقي وحاصل قسمة عدد صحيح على عدد طبيعي غير معدوم

البرنامج هو في الشاشة المقابلة ولتحريره نستعمل الوظائف المعينة كالتالي :

باللمسة **PRGM** نعين *New* نوافق ثم نسمي البرنامج مثلا *MOD* .

للحصول على Input ، Disp نستعمل اللمسة **PRGM** ثم I/O .

للحصول على int() نستعمل اللمسة **MATH** ثم NUM .

للحصول على السهم → أضغط اللمسة **→STO** .

للحصول على = نستعمل اللمسة **2nd TEST** المجودة مع اللمسة **MATH**

للخروج من تحرير البرنامج نستعمل اللمسة **2nd OUT** الموجودة مع **MODE**

تطبيق البرنامج :

```
PROGRAM:MOD
:Input "A=";A
:Input "B=";B
:INT(A/B)→Q
:A-B→R
:Disp "Q=";Q
:Disp "R=";R
```

```
A=28
B=3
Q=
R=
3
4
Done
```

```
EDIT NEW
1:COEFBEUZ
2:DIVSEURA
3:MOD
4:PGCDSOUS
5:PREMIER
```

لاستعمال البرنامج ، أضغط اللمسة **PRGM**

ثم اختر الاسم في القائمة EXEC .

التعرف على عدد أولي :

باللمسة **PRGM** نعين *New* ونسمي البرنامج مثلا *PREMIER* .

للحصول على Prompt ، Disp نستعمل اللمسة **PRGM** ثم I/O .

للحصول على If ، Then ، Stop ، End ، For(، While ، Else

نستعمل كذلك اللمسة **PRGM** مع CTL .

للحصول على = و ≤ نستعمل اللمسة **2nd TEST** المجودة مع اللمسة **MATH**

وأي موجودة في قائمة TEST .

أما or بنفس الخطوات السابقة وهي موجودة في قائمة LOGIC .

للحصول على f Part() نستعمل اللمسة **MATH** مع NUM .

للحصول على السهم → أضغط اللمسة **→STO** .

للخروج من تحرير البرنامج نستعمل اللمسة **2nd OUT** الموجودة مع **MODE**

تطبيق البرنامج :

```
PROGRAM:PREMIER
:Prompt N
:N→A
:If A=2 or A=3
:Then
:Disp "PREMIER"
:Stop
:End
:For(N,2,3)
:If fPart(A/N)=0
:Then
:Disp "NON PREMIER"
:Stop
:End
:While N<A
:If fPart(A/N)=0
:Then
:Disp "NON PREMIER"
:Stop
:End
:N←N+1
:End
:Disp "PREMIER"
:Stop
```

```
PRGM:PREMIER
N=22009
NON PREMIER
Done
N=22011
PREMIER
Done
```

```
EDIT NEW
1:COEFBEUZ
2:DIVSEURA
3:MOD
4:PGCDSOUS
5:PREMIER
```

لاستعمال البرنامج ، أضغط اللمسة **PRGM**

ثم اختر الاسم في القائمة EXEC .


```

: Prompt A,B
: 1→U:A→C
: While fPart((A-
1)/B)≠0
: U+1→U
: U×C→A
: End
: (1-A)/B→U
: Disp U,U

```

$$Ax + By = 1$$

للحصول على الوظائف أنظر البرنامجين السابقين .

وللحصول على الوظيفة $\neq$ نفس الخطوات للوظيفة = .

```

Prgm COEFBEUZ
A=?
B=?12

```

تطبيق البرنامج :

7
-4
Done

```

EDIT NEW
1: COEFBEUZ
2: DIVSEURA
3: MOD

```

```

PROGRAM:DIVSEURA
: Prompt A
: For(I,1,A)
: If fPart(A/I)≠0
: Then
: Disp I
: Pause
: End
: End

```

تعيين القواسم الموجبة لعدد طبيعي A

للحصول على الوظيفتين For و Pause استعمل

اللمسة **PRGM** مع CTL .

```

Prgm DIVSEURA
A=?28

```

تطبيق البرنامج :

1
2
4
7
14
28
Done

```

EDIT NEW
1: COEFBEUZ
2: DIVSEURA
3: MOD

```

ملاحظة : الحاسبة البيانية TI 89 تحتوي على الوظيفتين mod و Est Prem (أو Is Prime)

حيث الوظيفة mod تعطي مباشرة باقي قسمة ، والوظيفة Est Prem (أو Is Prime) تبحث عن العدد الأولي

تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية :

نحرر برنامجين ، الأول "FACTPREM"

ويستخدم برنامجا ثانيا "DIVISE" .

استعمل نفس الوظائف ونفس اللمسات المذكورة سابقا زيادة

للحصول على الوظيفتين

Return و prgm

استعمل اللمسة **PRGM**

مع CTL .

```

PROGRAM:DIVISE
: While fPart(A/N)
: Disp "",N
: Pause
: A/N→A
: End
: Return

```

```

PROGRAM:FACTPREM
: Prompt A
: 2→N
: Prgm DIVISE
: 3→N
: Prgm DIVISE
: 5→N: 2→M: -2→J
: While N≠J(A)
: Prgm DIVISE
: N+M→N
: -J→J
: M+J→M
: End
: If A≠1
: Then
: Disp "",A
: End
: Disp "FIN"

```

```

1/O EXEC
2: Pause
3: Lbl
4: Goto
5: IS<<
6: OS<<
7: Menu<
8: Prgm

```

```

Prgm FACTPREM
A=?28

```

تطبيق البرنامج :

FIN

Done

```

EDIT NEW
1: COEFBEUZ
2: DIVISE
3: DIVSEURA
4: FACTPREM

```

PRGM

القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر

نضغط على اللمسة MATH ثم في القائمة NUM

نعيّن الوظيفة $lcm: 8$ ، نكل على المضاعف المشترك الأصغر

أو الوظيفة $\gcd(9, \cdot)$ ، تدل على القاسم المشترك الأكبر

نحجز العديدين ونفصل بينهما بالفاصلة .

المتّاليات:

المتتالية من الشكل $u_n = f(n)$

• نمثل المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2n^2 - n - 3$

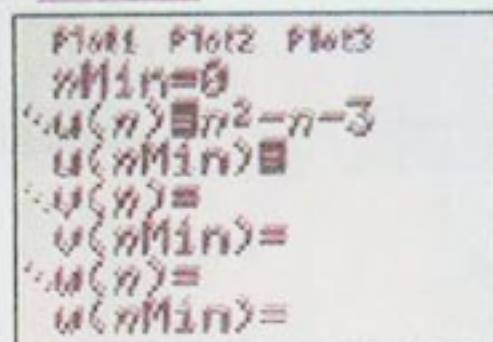
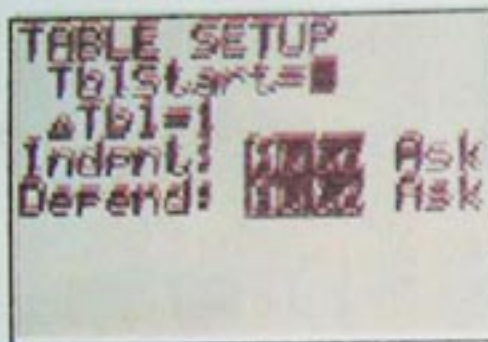
MODE استعمال 1

نحجز العبارة u_n $y=$ 2

ونحدد الخاصية Seq

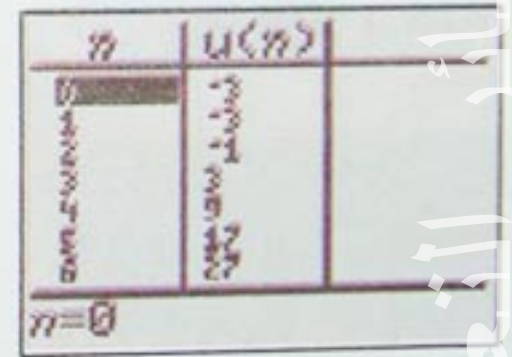
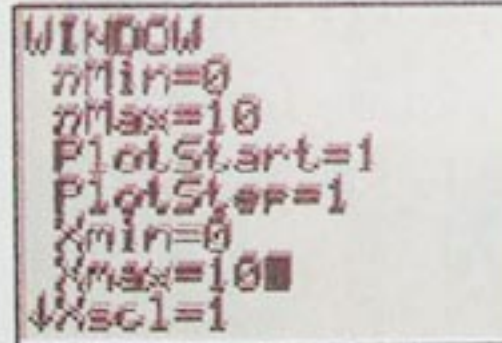
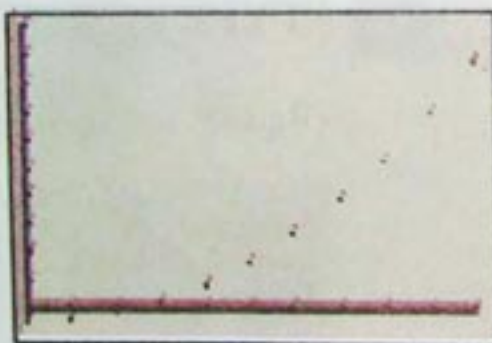
ولكتابة n نستعمل x, t, θ, n

ENTER 1 ENTER 0 TBLSET WINDOW 2nd 3



GRAPH 6

ونتمم $Y_{\min} = -5$  

$$Y_{\text{scl}} = 5, \quad Y_{\text{max}} = 100$$


مثالية معرفة بعلاقة تراجمية

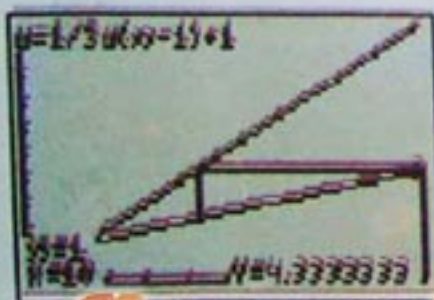
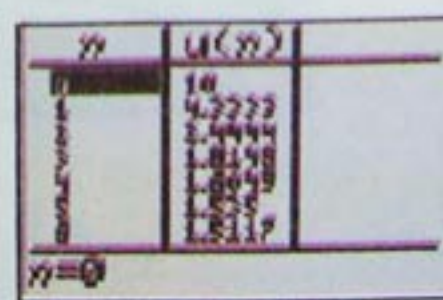
• نمثل المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 5$ و من أجل كل عدد طبيعي n حيث $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + 1$, $n \geq 1$

WINDOW

4 ZOOM 2nd

TRACE النافذة ثم

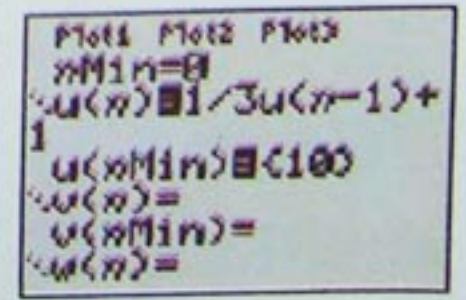
ونختار web

3 WINDOW 2ndTABLE 1
continued

1. MODE 2. ونحدد الخاصية

Seq ثم ٧- للحجز.

لكتابة u نضغط



المتتاليات من الشكل $u_n = f(n)$

حجز المتتالية u المعرفة على N بـ : $u_n = 2n^2 - 3n - 4$

(RANG) **5F**

```
Table Range n
Start:0
End :10
```

(TYPE) **3F** **EXIT**

4F استعمال (a_n) **1F**

```
Recursion
an=2n^2-3n-4
bn=
```

استعمال اللمسة **MENU**

ثم الوظيفة الثامنة (RECUR)

```
MAIN MENU
NVR  STAT  F1AT  LIST  SEAR
X=  Y=  Z=  W=  V=  U=
DYNM  TABLE  RECUR  CONVE  EDUA
VIEW  EDIT  DEL  COPY  PASTE
PRGM  TMR  LTIME  SORT  MEM
```

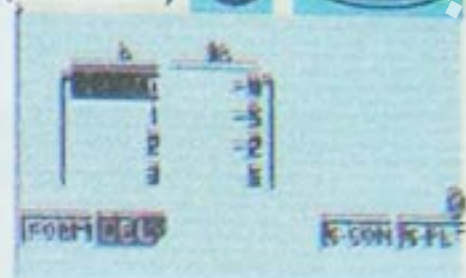
(G.PLT) **6F** (TABL) **F6** **EXIT**



3F **SHIFT**

```
View Window
Xmin :0
Xmax :10
Scale:1
Ymin :-5
Ymax :100
Scale:10
EXIT ITA13 BT5 SHU REL
```

(TABL) **F6** **EXIT**



المتتاليات التراجعية

نعتبر المتتالية u المعرفة بـ $u_0 = 10$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 0,5u_n + 1$

استعمال اللمسة **MENU** ثم الوظيفة الثامنة

(TABL) **F6** **EXIT**



(RANG) **5F** ، ونملئ

الخانات كما في الشاشة .

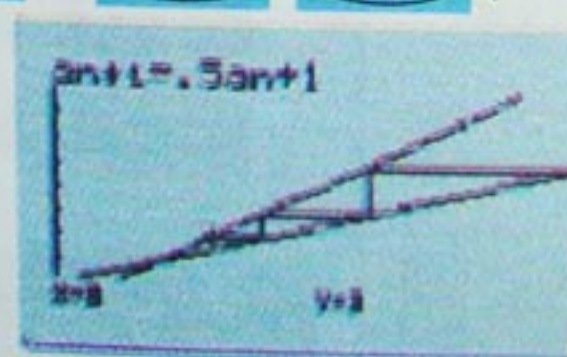
```
Table Range n+1
Start:0
End :10
a0 :10
b0 :0
anStr:10
bnStr:0
Tab(a)
```

(RECUR) ، (TYPE) **3F** (a_{n+1}) **2F**

نستعمل **4F** **2F** من أجل a_n

```
Recursion
an+1=0.5an+1
bn+1=
```

EXIT ... **EXIT** **EXIT** (WEB) **4F** **F6** **EXIT** **3F** **SHIFT**



لتحميل الكتب المدرسية
الابتدائي-المتوسط-الثانوي
إضغط هنا

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

